Math 251.

TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniére nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une maniére quelconque.

Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE DE MAUREPAS,

Miniſtre & Sécrétaire d'Etat de la Marine, Commandeur des Ordres du Roi.

MONSEIGNEUR,

Perſuadé qu'un homme de Lettres ne peut mieux vous faire ſa cour que par ſes travaux, je me ſuis propoſé de contribuer à la perfection de la Méchanique, en la réduiſant à un petit nombre de Principes ſimples

& féconds, d'applanir entiérement les routes qui étoient déja frayées dans cette Science, de porter même la lumiére dans celles qui jusqu'à présent ont été le moins connues; en un mot, d'éclaircir & d'étendre tout à la fois la partie la plus utile des Mathematiques. Si l'exécution répondoit à mon projet, je me flatterois, MONSEIGNEUR, *que cet Ouvrage pourroit n'être pas indigne de paroître sous vos auspices: mais quel que doive être le succès de ce premier fruit de mon travail, j'espere que vous voudrez bien le regarder comme une marque de mon zèle pour l'avancement des Sciences, & de l'intérêt que j'ose prendre à la gloire du Ministre qui les protege. Je suis avec un profond respect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur D'ALEMBERT.

PRÉFACE.

LA certitude des Mathematiques eſt un avantage que ces Sciences doivent principalement à la ſimplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathematiques n'ont pas un objet également ſimple, auſſi la certitude proprement dite, celle qui eſt fondée ſur des Principes néceſſairement vrais & évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même maniére à toutes ces parties. Pluſieurs d'entr'elles, appuyées ſur des Principes Phyſiques, c'eſt-à-dire ſur des vérités d'Expériences, ou ſur de ſimples hypotheſes, n'ont, pour ainſi dire, qu'une certitude d'Expérience, ou même de pure ſuppoſition. Il n'y a, à parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'eſt-à-dire l'Algébre, la Geométrie & la Méchanique, qu'on puiſſe regarder comme marquées au ſceau de l'évidence. Encore y a-t'il dans la lumiére que ces Sciences préſentent à notre eſprit, une eſpece de gradation, &, pour ainſi dire, de nuance à obſerver. Plus l'objet qu'elles embraſſent eſt étendu, & conſidéré d'une maniére générale & abſtraite, plus auſſi leurs Principes ſont exempts de nuages & faciles à ſaiſir. C'eſt par cette raiſon que la Geométrie eſt plus ſimple que la Méchanique, & l'un & l'autre moins ſimples que l'Algébre. Ce Paradoxe ne paroîtra point tel à ceux qui ont étudié ces Sciences en Philoſophes : les notions les plus abſtraites, celles que le commun des hommes regarde comme les plus inacceſſibles, ſont néanmoins celles qui portent avec elles une plus grande lumiére : l'obſcurité ſemble s'emparer de nos idées à meſure que nous les appliquons à des objets particuliers, & que nous examinons leurs propriétés ſenſibles ; & ſi nous voulons pénétrer plus avant dans la nature de ces objets, nous trouvons preſque toujours, que leur exiſtence, appuyée ſur le témoignage douteux de nos ſens, eſt ce que nous connoiſſons le moins imparfaitement en eux.

Il réſulte de ces réflexions, que pour traiter ſuivant la meilleure Méthode poſſible quelque partie des Mathematiques que ce ſoit (nous pourrons même dire quelque Science que ce puiſſe être) il eſt néceſſaire nonſeulement d'y introduire & d'y appliquer autant qu'il ſe peut, des connoiſſances puiſées dans des Sciences plus abſtraites, & par conſéquent plus ſimples, mais encore d'enviſager de la maniére la plus abſtraite & la plus ſimple qu'il ſe puiſſe, l'objet particulier de cette Science; de ne rien ſuppoſer, ne rien admettre dans cet objet, que les propriétés que la Science même qu'on traite y ſuppoſe. Delà réſultent deux avantages: les Principes reçoivent toute la clarté dont ils ſont ſuſceptibles: ils ſe trouvent d'ailleurs réduits au plus petit nombre poſſible, & par ce moyen ils ne peuvent manquer d'acquérir en même tems plus d'étendue, puiſque l'objet d'une Science étant néceſſairement déterminé, les principes en ſont d'autant plus féconds, qu'ils ſont en plus petit nombre.

On a penſé depuis long-tems, & même avec ſuccès, à remplir dans les Mathematiques, une partie du plan que nous venons de tracer: on a appliqué heureuſement, l'Algébre à la Geométrie, la Geométrie à la Méchanique, & chacune de ces trois Sciences à toutes les autres, dont elles ſont la baſe & le fondement. Mais on n'a pas été si attentif, ni à réduire les Principes de ces Sciences au plus petit nombre, ni à leur donner toute la clarté qu'on pouvoit desirer. La Méchanique surtout, est celle qu'il paroît qu'on a négligé le plus à cet égard : aussi la plûpart de ses Principes, ou obscurs par eux-mêmes, ou énoncés & démontrés d'une maniére obscure, ont-ils donné lieu à plusieurs questions épineuses. En général, on a été plus occupé jusqu'à présent à augmenter l'édifice qu'à en éclairer l'entrée ; & on a pensé principalement à l'élever, sans donner à ses fondemens toute la solidité convenable.

Je me suis proposé dans cet Ouvrage de satisfaire à ce double objet, de reculer les limites de la Méchanique, & d'en applanir l'abord ; & mon but principal a été de remplir en quelque sorte un de ces objets par l'autre, c'est-à-dire, non-seulement de déduire les Principes de la Méchanique des notions les plus claires, mais de les appliquer aussi à de nouveaux usages ; de faire voir tout à la fois, & l'inutilité de plusieurs Principes qu'on avoit employés jusqu'ici dans la Méchanique, & l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science ; en un mot, d'étendre les Principes en les réduisant. Telles ont été mes vûes dans le Traité que je mets au jour. Pour faire connoître au Lecteur les moyens par lesquels j'ai tâché de les remplir, il ne sera peut-être pas inutile d'entrer ici dans un examen raisonné de la Science que j'ai entrepris de traiter.

Le Mouvement & ses propriétés générales, sont le premier & le principal objet de la Méchanique; cette Science suppose l'existence du Mouvement, & nous la supposerons aussi comme avouée & reconnue de tous les Physiciens. A l'égard de la nature du Mouvement, les Philosophes sont au contraire fort partagés là-dessus. Rien n'est plus naturel, je l'avoue, que de concevoir le Mouvement comme l'application successive du mobile aux différentes parties de l'espace indéfini, que nous imaginons comme le lieu des Corps : mais cette idée suppose un espace dont les parties soient pénétrables & immobiles; or personne n'ignore que les Cartesiens (Secte à la vérité fort affoiblie aujourd'hui) ne reconnoissent point d'espace distingué des Corps, & qu'ils regardent l'étendue & la matiére comme une même chose. Il faut convenir qu'en partant d'un pareil Principe, le Mouvement seroit la chose la plus difficile à concevoir, & qu'un Cartésien auroit peut-être beaucoup plutôt fait d'en nier l'éxiſtence, que de chercher à en définir la nature. Au reſte, quelque abſurde que nous paroiſſe l'opinion de ces Philoſophes, & quelque peu de clarté & de préciſion qu'il y ait dans les Principes Métaphyſiques ſur leſquels ils s'efforcent de l'appuyer, nous n'entreprendrons point de la réfuter ici : nous nous contenterons de remarquer, que pour avoir une idée claire du Mouvement, on ne peut ſe diſpenſer de diſtinguer au moins par l'eſprit deux ſortes d'étendue : l'une, qui ſoit regardée comme impénétrable, & qui conſtitue ce qu'on appelle proprement les Corps ; l'autre, qui étant conſidérée ſimplement comme étendue, ſans examiner ſi elle eſt pénétrable ou non, ſoit la meſure de la diſtance d'un Corps à un autre, & dont les parties enviſagées comme fixes & immobiles, puiſſent ſervir à juger du repos ou du Mouvement des Corps. Il nous ſera donc toujours permis de concevoir un eſpace indéfini comme le lieu des Corps, ſoit réel, ſoit ſuppoſé, & de regarder le Mouvement comme le tranſport du mobile d'un lieu dans un autre.

La conſidération du Mouvement entre quelquefois dans les recherches de Geométrie pure ; c'eſt ainſi qu'on imagine ſouvent les lignes, droites ou courbes, engendrées par le Mouvement continu d'un point, les ſurfaces par le Mouvement d'une ligne, les ſolides enfin par celui d'une ſurface. Mais il y a entre la Méchanique & la Geométrie cette différence, nonſeulement que dans celle-ci, la génération des Figures par le Mouvement eſt, pour ainſi dire, arbitraire, & de pure élégance, mais encore que la Geométrie ne conſidére dans le Mouvement que l'eſpace parcouru, au lieu que dans la Méchanique on a égard de plus au tems que le mobile employe à parcourir cet eſpace.

On ne peut comparer enſemble deux choſes d'une nature différente, telles que l'eſpace & le tems : mais on peut comparer le rapport des parties du tems avec celui des parties de l'eſpace parcouru. Le tems par ſa nature coule uniformément, & la Méchanique ſuppoſe cette uniformité. Du reſte, ſans connoître le tems en lui-même & ſans en avoir de meſure préciſe, nous ne pouvons repréſenter plus clairement le rapport de ſes parties, que par celui des portions d'une ligne droite indéfinie. Or l'analogie qu'il y a entre le rapport des parties d'une telle ligne, & celui des parties de l'eſpace parcouru par un Corps qui ſe meut d'une maniére quelconque, peut toujours être exprimée par une Equation : on peut donc imaginer une

Courbe, dont les abſciſſes repréſentent les portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, les ordonnées correſpondantes déſignant les eſpaces parcourus durant ces portions de tems : l'Equation de cette Courbe exprimera, non le rapport des tems aux eſpaces, mais, ſi on peut parler ainſi, le rapport du rapport que les parties de tems ont à leur unité, à celui que les parties de l'eſpace parcouru ont à la leur. Car l'Equation d'une Courbe peut être conſidérée, ou comme exprimant le rapport des ordonnées aux abſciſſes, ou comme l'Equation entre le rapport que les ordonnées ont à leur unité, & le rapport que les abſciſſes correſpondantes ont à la leur.

Il eſt donc évident que par l'application ſeule de la Geométrie & du calcul, on peut, ſans le ſecours d'aucun autre Principe, trouver les propriétés générales du Mouvement, varié ſuivant une loi quelconque. Mais comment arrive-t'il que le Mouvement d'un Corps ſuive telle ou telle loi particuliére ? c'eſt ſur quoi la Geométrie ſeule ne peut rien nous apprendre, & c'eſt auſſi ce qu'on peut regarder comme le premier Problême qui appartienne immédiatement à la Méchanique.

On voit d'abord fort clairement, qu'un Corps ne peut ſe donner le Mouvement à lui-même. Il

ne

ne peut donc être tiré du repos, que par l'action de quelque cause étrangére. Mais continue-t'il à se mouvoir de lui-même, ou a-t'il besoin pour se mouvoir de l'action répetée de la cause? Quelque parti qu'on pût prendre là-dessus, il sera toujours incontestable, que l'existence du Mouvement étant une fois supposée sans aucune autre hypothese particuliére, la loi la plus simple qu'un mobile puisse observer dans son Mouvement, est la loi d'uniformité, & c'est par conséquent celle qu'il doit suivre, comme on le verra plus au long dans le premier Chapitre de ce Traité. Le Mouvement est donc uniforme par sa nature: j'avoue que les preuves qu'on a données jusqu'à présent de ce Principe, ne sont peut-être pas fort convaincantes: on verra dans mon Ouvrage les difficultés qu'on peut leur opposer, & le chemin que j'ai pris pour éviter de m'engager à les résoudre. Il me semble que cette loi d'uniformité essentielle au Mouvement considéré en lui-même, fournit une des meilleures raisons sur lesquelles la mesure du tems par le Mouvement uniforme puisse être appuyée. Aussi j'ai cru devoir entrer là-dessus dans quelque détail, quoique au fond cette discussion puisse paroître étrangére à la Méchanique.

La *force d'inertie*, c'est-à-dire, la propriété qu'ont les Corps de perséverer dans leur état de repos ou de Mouvement, étant une fois établie, il est clair que le Mouvement, qui a besoin d'une cause pour commencer au moins à exister, ne sauroit non plus être accéléré ou retardé que par une cause étrangére. Or quelles sont les causes capables de produire ou de changer le Mouvement dans les Corps? Nous n'en connoissons jusqu'à présent que de deux sortes : les unes se manifestent à nous en même-tems que l'effet qu'elles produisent, ou plutôt dont elles sont l'occasion ; ce sont celles qui ont leur source dans l'action sensible & mutuelle des Corps, résultante de leur impénétrabilité : elles se réduisent à l'impulsion & à quelques autres actions dérivées de celle-là : toutes les autres causes ne se font connoître que par leur effet, & nous en ignorons entiérement la nature : telle est la cause qui fait tomber les Corps pesans vers le centre de la Terre, celle qui retient les Planetes dans leurs Orbites, &c.

Nous verrons bientôt comment on peut déterminer les effets de l'impulsion, & des causes qui peuvent s'y rapporter : pour nous en tenir ici à celles de la seconde espece, il est clair que lorsqu'il est question des effets produits par de telles causes, ces effets doivent toujours être donnés indépendamment de la connoiſſance de la cauſe, puiſqu'il ne peuvent en être déduits : c'eſt ainſi que ſans connoître la cauſe de la peſanteur, nous apprenons par l'Expérience que les eſpaces décrits par un Corps qui tombe, ſont entr'eux comme les quarrés des tems. En général, dans les Mouvemens variés dont les cauſes ſont inconnues, il eſt évident que l'effet produit par la cauſe, ſoit dans un tems fini, ſoit dans un inſtant, doit toujours être donné par l'Equation entre les tems & les eſpaces : cet effet une fois connu, & le Principe de la force d'inertie ſuppoſé, on n'a plus beſoin que de la Geométrie ſeule & du calcul, pour découvrir les propriétés de ces ſortes de Mouvemens. Pourquoi donc aurions-nous recours à ce Principe dont tout le monde fait uſage aujourd'hui, que la force accélératrice ou retardatrice eſt proportionnelle à l'Élément de la viteſſe; principe appuyé ſur cet unique axiôme vague & obſcur, que l'effet eſt proportionnel à ſa cauſe. Nous n'examinerons point ſi ce Principe eſt de verité néceſſaire; nous avouerons ſeulement que les preuves qu'on en a données juſqu'ici, ne nous paroiſſent pas fort convaincantes : nous ne l'adopterons pas non plus, avec quelques Geométres, comme de verité purement contingente, ce qui ruineroit la certitude de la Méchanique, & la réduiroit à n'être plus qu'une Science expérimentale : nous nous contenterons d'obſerver, que vrai ou douteux, clair ou obſcur, il eſt inutile à la Méchanique, & que par conſéquent il doit en être banni.

Nous n'avons fait mention juſqu'à préſent, que du changement produit dans la viteſſe du mobile par les cauſes capables d'altérer ſon Mouvement: & nous n'avons point encore cherché ce qui doit arriver, ſi la cauſe motrice tend à mouvoir le Corps dans une direction différente de celle qu'il a déja. Tout ce que nous apprend dans ce cas le Principe de la force d'inertie, c'eſt que le mobile ne peut tendre qu'à décrire une ligne droite, & à la décrire uniformément : mais cela ne fait connoître ni ſa viteſſe ni ſa direction. On eſt donc obligé d'avoir recours à un ſecond Principe, c'eſt celui qu'on appelle la compoſition des Mouvemens, & par lequel on détermine le Mouvement unique d'un Corps qui tend à ſe mouvoir ſuivant différentes directions à la fois avec des viteſſes données. On trouvera dans cet Ouvrage une démonſtration nouvelle de ce Principe, dans laquelle je me ſuis propoſé, & d'éviter toutes les difficultés auxquelles ſont ſujettes les démonſtrations qu'on en donne communément, &

en même-tems de ne pas déduire d'un grand nombre de propositions compliqués, un Principe qui étant l'un des premiers de la Méchanique, doit nécessairement être appuyé sur des preuves simples & faciles.

Comme le Mouvement d'un Corps qui change de direction, peut être regardé comme composé du Mouvement qu'il avoit d'abord & d'un nouveau Mouvement qu'il a reçu, de même le Mouvement que le Corps avoit d'abord peut être regardé comme composé du nouveau Mouvement qu'il a pris, & d'un autre qu'il a perdu. Delà il s'ensuit que les loix du Mouvement changé par quelques obstacles que ce puisse être, dépendent uniquement des loix du Mouvement détruit par ces mêmes obstacles. Car il est évident qu'il suffit de décomposer le Mouvement qu'avoit le Corps avant la rencontre de l'obstacle, en deux autres Mouvemens, tels, que l'obstacle ne nuise point à l'un, & qu'il anéantisse l'autre. Par-là, on peut nonseulement démontrer les loix du Mouvement changé par des obstacles insurmontables, les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette Méthode ; on peut encore déterminer dans quel cas le Mouvement est détruit par ces mêmes obstacles. A l'égard des loix du Mouvement changé par des obſtacles qui ne ſont pas inſurmontables en eux-mêmes, il eſt clair par la même raiſon, qu'en général il ne faut pour déterminer ces loix, qu'avoir bien conſtaté celles de l'équilibre.

Or quelle doit être la loi générale de l'équilibre des Corps! Tous les Geométres conviennent, que deux Corps dont les directions ſont oppoſées, ſe font équilibre quand leurs maſſes ſont en raiſon inverſe des viteſſes avec leſquelles ils tendent à ſe mouvoir; mais il n'eſt peut-être pas facile de démontrer cette loi en toute rigueur, & d'une maniére qui ne renferme aucune obſcurité; auſſi la plûpart des Geométres ont-ils mieux aimé la traiter d'axiôme, que de s'appliquer à la prouver. Cependant, ſi l'on y fait attention, on verra qu'il n'y a qu'un ſeul cas où l'équilibre ſe manifeſte d'une maniére claire & diſtincte; c'eſt celui où les maſſes des deux Corps ſont égales, & leurs viteſſès égales & oppoſées. Le ſeul parti qu'on puiſſe prendre, ce me ſemble, pour démontrer l'équilibre dans les autres cas, eſt de les réduire, s'il ſe peut, à ce premier cas ſimple & évident par lui-même. C'eſt auſſi ce que j'ai tâché de faire; le Lecteur jugera ſi j'y ai réuſſi.

Le Principe de l'équilibre joint à ceux de la force d'inertie & du Mouvement compoſé, nous conduit donc à la ſolution de tous les Problêmes où l'on conſidére le Mouvement d'un Corps, en tant qu'il peut être altéré par un obſtacle impénétrable & mobile, c'eſt-à-dire en général par un autre Corps à qui il doit néceſſairement communiquer du Mouvement pour conſerver au moins une partie du ſien. De ces Principes combinés, on peut donc aiſément déduire les loix du Mouvement des Corps qui ſe choquent d'une maniére quelconque, ou qui ſe tirent par le moyen de quelque Corps interpoſé entr'eux, & auquel ils ſont attachés : loix auſſi certaines & de verité auſſi néceſſaire, que celles du Mouvement des Corps altéré par des obſtacles inſurmontables, puiſque les unes & les autres ſe déterminent par les mêmes Méthodes.

Si les Principes de la force d'inertie, du Mouvement composé, & de l'équilibre, ſont eſſentiellement differens l'un de l'autre, comme on ne peut s'empêcher d'en convenir ; & ſi d'un autre côté, ces trois Principes ſuffiſent à la Méchanique, c'eſt avoir réduit cette Science au plus petit nombre de Principes poſſible, que d'avoir établi ſur ces trois Principes toutes les loix du Mouvement des Corps dans des circonſtances quelconques, comme j'ai táché de le faire dans ce Traité.

A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſéquence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténèbres ſur une Science claire par elle-même.

C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle

au

au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui ; je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très-ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

* Voyez le Diſcours ſur les loix de la communication du Mouvement, qui a mérité l'Eloge de l'Académie en l'année 1726. où le *P. Maziere* remporta le prix.

vement, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre par-là en général, que la propriété qu'ont les Corps qui se meuvent, de vaincre les obstacles qu'ils rencontrent, ou de leur résister. Ce n'est donc ni par l'espace qu'un Corps parcourt uniformément, ni par le tems qu'il employe à le parcourir, ni enfin par la considération simple, unique & abstraite de sa masse & de sa vitesse qu'on doit estimer immédiatement la force, c'est uniquement par les obstacles qu'un Corps rencontre, & par la résistance que lui font ces obstacles. Plus l'obstacle qu'un Corps peut vaincre, ou auquel il peut résister, est considérable, plus on peut dire que sa *force* est grande, pourvû que sans vouloir représenter par ce mot un prétendu être qui réside dans le Corps, on ne s'en serve que comme d'une maniére abregée d'exprimer un fait, à peu près comme on dit, qu'un Corps a deux fois autant de *vitesse* qu'un autre; au lieu de dire qu'il parcourt en tems égal deux fois autant d'espace, sans prétendre pour cela que ce mot de *vitesse* représente un être inhérent au Corps.

Ceci bien entendu, il est clair qu'on peut opposer au Mouvement d'un Corps trois sortes d'obſtacles ; ou des obſtacles invincibles qui anéantiſſent tout-à-fait ſon Mouvement, quel qu'il puiſſe être ; ou des obſtacles qui n'ayent préciſément que la réſiſtance néceſſaire pour anéantir le Mouvement du Corps, & qui l'anéantiſſent dans un inſtant, c'eſt le cas de l'équilibre ; ou enfin des obſtacles qui anéantiſſent le Mouvement peu à peu, c'eſt le cas du Mouvement retardé. Comme les obſtacles inſurmontables anéantiſſent également toutes ſortes de Mouvemens, ils ne peuvent ſervir à faire connoître la force : ce n'eſt donc que dans l'équilibre, ou dans le Mouvement retardé qu'on doit en chercher la meſure. Or tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux Corps, quand les produits de leurs maſſes par leurs viteſſes virtuelles, c'eſt-à-dire par les viteſſes avec leſquelles ils tendent à ſe mouvoir, ſont égaux de part & d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la maſſe par la viteſſe, ou, ce qui eſt la même choſe, la quantité de Mouvement, peut repréſenter la force. Tout le monde convient auſſi que dans le Mouvement retardé, le nombre des obſtacles vaincus eſt comme le quarré de la viteſſe, enſorte qu'un Corps qui a fermé un reſſort, par exemple, avec une certaine viteſſe, pourra avec une viteſſe double fermer, ou tout à la fois, ou ſucceſſivement, non pas deux, mais quatre reſſorts ſemblables au premier, neuf avec une viteſſe triple, & ainſi du reſte. D'où les partiſans des forces vives concluent que la force des Corps qui ſe meuvent actuellement, eſt en général comme le produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe. Au fond, quel inconvénient pourroit-il y avoir, à ce que la meſure des forces fût différente dans l'équilibre & dans le Mouvement retardé, puiſque, ſi on veut ne raiſonner que d'après des idées claires, on doit n'entendre par le mot de *force*, que l'effet produit en ſurmontant l'obſtacle ou en lui réſiſtant? Il faut avouer cependant, que l'opinion de ceux qui regardent la force comme le produit de la maſſe par la viteſſe, peut avoir lieu nonſeulement dans le cas de l'équilibre, mais auſſi dans celui du Mouvement retardé, ſi dans ce dernier cas on meſure la force, non par la quantité abſolue des obſtacles, mais par la ſomme des réſiſtances de ces mêmes obſtacles. Car on ne ſauroit douter que cette ſomme de réſiſtances, ne ſoit proportionnelle à la quantité de Mouvement, puiſque, de l'aveu de tout le monde, la quantité de Mouvement que le Corps perd à chaque inſtant, eſt proportionnelle au produit de la réſiſtance par la durée infiniment petite de l'inſtant, & que la ſomme de ces produits, eſt évidemment la réſiſtance totale. Toute la difficulté ſe réduit donc à ſavoir ſi on doit meſurer la force par la quantité abſolue des obſtacles, ou par la ſomme de leurs réſiſtances. Il me paroîtroit plus naturel de meſurer la force de cette derniére maniére; car un obſtacle n'eſt tel qu'en tant qu'il réſiſte, & c'eſt, à proprement parler, la ſomme des réſiſtances qui eſt l'obſtacle vaincu : d'ailleurs, en eſtimant ainſi la force, on a l'avantage d'avoir pour l'équilibre & pour le Mouvement retardé une meſure commune : néanmoins comme nous n'avons d'idée préciſe & diſtincte du mot de *force*, qu'en reſtraignant ce terme à exprimer un effet, je crois qu'on doit laiſſer chacun le maître de ſe décider comme il voudra là-deſſus; & toute la queſtion ne peut plus conſiſter, que dans une diſcuſſion Métaphyſique très-futile, ou dans une diſpute de mots plus indigne encore d'occuper des Philoſophes. Auſſi n'auroit-elle pas ſans doute enfanté tant de volumes, ſi on ſe fut attaché à diſtinguer ce qu'elle renfermoit de clair & d'obſcur. En s'y prenant ainſi, on n'auroit eu beſoin que de quelques lignes pour décider la queſtion : ſeroit-ce là ce que la plûpart de ceux qui ont traité cette matiére, auroient voulu éviter?

Après avoir donné au Lecteur une idée générale de l'objet que je me ſuis propoſé dans cet Ouvrage, il ne me reſte plus qu'un mot à dire ſur la forme que j'ai cru devoir lui donner. J'ai tâché dans ma premiére Partie de mettre, le plus qu'il m'a été poſſible, les Principes de la Méchanique à la portée des commençans; je n'ai pu me diſpenſer d'employer le calcul différentiel dans la Theorie des Mouvemens variés; c'eſt la nature du ſujet qui m'y a contraint. Au reſte, j'ai fait enſorte de renfermer dans cette premiére Partie un aſſez grand nombre de choſes dans un fort petit eſpace, & ſi je ne ſuis point entré dans tout le détail que la matiére pourroit comporter, c'eſt qu'uniquement attentif à l'expoſition & au développement des Principes eſſentiels de la Méchanique, & ayant pour but de réduire cet Ouvrage à ce qu'il peut contenir de nouveau en ce genre, je n'ai pas crû devoir le groſſir d'une infinité de propoſitions particuliéres que l'on trouvera aiſément ailleurs.

La ſeconde Partie, dans laquelle je me ſuis propoſé de traiter des loix du Mouvement des Corps entr'eux, fait la portion la plus conſidérable de l'Ouvrage : c'eſt la raiſon qui m'a engagé à donner à ce Livre le nom de *Traité de Dynamique*. Ce nom, qui ſignifie proprement la Science des puiſſances ou cauſes motrices, pourroit paroître d'abord ne pas convenir à cet Ouvrage, dans lequel j'enviſage plutôt la Méchanique comme la Science des effets, que comme celle des cauſes : néanmoins comme le mot de *Dynamique* eſt fort uſité aujourd'hui parmi les Savans, pour ſignifier la Science du Mouvement des Corps, qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniére quelconque ; j'ai cru devoir le conſerver, pour annoncer aux Geométres par le titre même de ce Traité, que je m'y propoſe principalement pour but de perfectionner & d'augmenter cette partie de la Méchanique. Comme elle n'eſt pas moins curieuſe qu'elle eſt difficile, & que les Problêmes qui s'y rapportent compoſent une claſſe très-étendue, les plus grands Geométres s'y ſont appliqués particuliérement depuis quelques années : mais ils n'ont réſolus juſqu'à préſent qu'un très-petit nombre de Problêmes de ce genre, & ſeulement dans des cas particuliers : la plûpart des ſolutions qu'ils nous ont données ſont outre cela appuyées ſur des Principes que perſonne n'a encore démontrés d'une maniére générale ; tels, par exemple, que celui de la conſervation des forces vives. J'ai donc cru devoir m'étendre principalement ſur ce ſujet, & faire voir comment on peut réſoudre toutes les queſtions de Dynamique par une même Méthode fort ſimple & fort directe, & qui ne conſiſte que dans la combinaiſon dont j'ai parlé plus haut, des Principes de l'Equilibre & du Mouvement composé. J'en montre l'uſage dans un petit nombre de Problêmes choiſis, dont quelques-uns ſont déja connus, d'autres ſont entiérement nouveaux, d'autres enfin ont été mal réſolus même par de très-grands Geométres.

L'élégance dans la ſolution d'un Problême, conſiſtant ſurtout à n'y employer que des Principes directs & en très-petit nombre, on ne ſera point ſurpris que l'uniformité qui regne dans toutes mes ſolutions, & que j'ai eu principalement en vûe, les rende quelquefois un peu plus longues, que ſi je les avois déduites de Principes moins directs. La démonſtration que j'aurois été obligé de faire de ces Principes, ne pouvoit d'ailleurs

que

que m'écarter de la briéveté que j'aurois cherché à me procurer par leur moyen ; & la portion la plus considérable de mon Livre, n'auroit plus été qu'un amas informe de Problêmes peu digne de voir le jour, malgré la variété que j'ai tâché d'y répandre, & les difficultés qui sont particuliéres à chacun d'eux.

Au reste, comme cette seconde Partie est destinée principalement à ceux, qui déja instruits du calcul différentiel & intégral, se seront rendus familiers les Principes établis dans la premiére, ou seront déja exercés à la solution des Problêmes connus & ordinaires de la Méchanique ; je dois avertir que pour éviter les circonlocutions, je me suis souvent servi du terme obscur de *force*, & de quelques autres qu'on employe communément quand on traite du Mouvement des Corps ; mais je n'ai jamais prétendu attacher à ces termes d'autres idées que celles qui résultent des Principes que j'ai établis, soit dans cette Préface, soit dans la premiére Partie de ce Traité.

Enfin, du même Principe qui me conduit à la solution de tous les Problêmes de Dynamique, je déduis aussi plusieurs propriétés du centre de gravité, dont les unes sont entiérement nouvelles, les autres n'ont été prouvées jusqu'à présent que d'une maniére vague & obscure, & je termine l'Ouvrage par une démonstration du Principe appellé communément, *la conservation des forces vives.*

Si ce premier essai est reçû favorablement du Public, il ne tardera pas à être suivi d'un autre Ouvrage, dans lequel ce qui concerne le Mouvement & l'équilibre des Fluides sera traité suivant la même Méthode, & par les mêmes Principes.

TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du Mouvement & de l'équilibre des Corps.

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniére quelconque, avec plusieurs applications de ce Principe.

Fin de la Table des Titres.

TRAITE'

TRAITÉ DE DYNAMIQUE.

Définitions & Notions préliminaires.

I.

SI deux portions d'étendüe semblables & égales entr'elles sont *impénétrables*, c'est-à-dire, si elles ne peuvent être imaginées unies & confondües l'une avec l'autre, de maniére qu'elles ne fassent qu'une même portion d'étendüe moindre que la somme des deux, chacune de ces portions d'étendüe sera ce qu'on appelle un *Corps*. L'impenétrabilité est la propriété principale par laquelle nous distinguons les Corps des parties de l'espace indéfini, où nous imaginons qu'ils sont placés.

Le *lieu* d'un Corps est la partie de l'espace qu'il occupe, c'est-à-dire la partie de l'espace avec laquelle l'étendüe du Corps est coincidente.

II.

Un Corps eſt en repos quand il reſte dans un même lieu ; il eſt en mouvement quand il paſſe d'un lieu dans un autre, c'eſt-à-dire, quand il occupe ſucceſſivement & ſans interruption des parties de l'eſpace immédiatement contigues les unes aux autres.

III.

Comme un Corps ne peut occuper pluſieurs lieux à la fois, il ne peut arriver d'un lieu à un autre dans le même inſtant : le mouvement ne peut donc ſe faire que durant un certain *tems*.

IV.

L'eſpace parcouru par un Corps qui ſe meut eſt diviſible à l'infini ; le tems eſt donc auſſi diviſible à l'infini. On conçoit de plus, que ſi un Corps ſe meut en ligne droite, ſans ſubir à chaque inſtant d'autre changement que le changement de place, il ne peut manquer de parcourir des eſpaces égaux en tems égaux. Dans ce cas, on dit que le Corps ſe meut *uniformément*. Si les eſpaces parcourus en tems égaux ſont croiſſans ou décroiſſans, le mouvement eſt dit *accéléré* ou *retardé*.

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du mouvement & de l'équilibre des Corps.

1. ON peut réduire tous les Principes de la Méca-nique à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, & l'équilibre. Au moins j'espere faire voir par ce Traité, que toute cette science peut être déduite de ces trois Principes. Je traiterai de chacun d'eux en particulier dans chacun des Chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

De la force d'inertie, & des propriétés du mouvement qui en résultent.

2. J'APPELLE avec M. Newton *force d'inertie*, la propriété qu'ont les Corps de rester dans l'état où ils sont : or un Corps est nécessairement dans l'état de repos ou dans celui de mouvement ; ce qui fournit les deux Loix suivantes.

I. LOI.

3. Un Corps en repos y persistera, à moins qu'une cause étrangere ne l'en tire. Car un Corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement.

COROLLAIRE.

4. Delà il s'enſuit, que ſi un Corps reçoit du mouvement par quelque cauſe que ce puiſſe être, il ne pourra de lui-même accélérer ni retarder ce mouvement.

5. On appelle en général *puiſſance* ou *cauſe motrice*, tout ce qui oblige un Corps à ſe mouvoir.

II. LOI.

6. Un Corps mis une fois en mouvement par une cauſe quelconque, doit y perſiſter toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cauſe, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas ſur lui, c'eſt-à-dire, qu'à moins qu'une cauſe étrangere & différente de la cauſe motrice, n'agiſſe ſur ce Corps, il ſe mouvra perpétuellement en ligne droite, & parcourrera en tems égaux des eſpaces égaux.

Car, ou l'action Indiviſible & inſtantanée de la cauſe motrice au commencement du Mouvement, ſuffit pour faire parcourir au Corps un certain eſpace, ou le Corps a beſoin pour ſe mouvoir de l'action continuée de la cauſe motrice.

Dans le premier cas, il eſt viſible que l'eſpace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite uniformément par le Corps mû. Car (*hyp.*) paſſé le premier inſtant, l'action de la cauſe motrice n'exiſte plus, & le Mouvement néanmoins ſubſiſte encore : il ſera donc néceſſairement uniforme, puiſque (*Art.* 4) un Corps ne peut accélérer ni retarder ſon Mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raiſon pour que le Corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche. Donc dans ce premier cas, où l'on ſuppoſe qu'il ſoit capable de ſe mouvoir de lui-même pendant un certain tems, indépendamment de la cauſe motrice, il ſe mouvra de lui-même pendant ce tems uniformément & en ligne droite.

Or un Corps qui peut ſe mouvoir de lui-même uniformément & en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à ſe mouvoir de la même maniére, ſi rien ne l'en empêche. Car ſuppoſons le Corps partant de *A*, (Fig. 1re) & capable de parcourir de lui-même uniformément la ligne *AB*; ſoient pris ſur la ligne *AB* deux points quelconques *C*, *D*, entre *A* & *B*. Le Corps étant en *D* eſt préciſément dans le même état que lorſqu'il eſt en *C*, ſi ce n'eſt qu'il ſe trouve dans un autre lieu. Donc il doit arriver à ce Corps la même choſe que quand il eſt en *C*. Or étant en *C* il peut (*hyp.*) ſe mouvoir de lui-même uniformément juſqu'en *B*. Donc étant en *D* il pourra ſe mouvoir de lui-même uniformément juſqu'au point *G*, tel que $DG = CB$, & ainſi de ſuite.

Donc ſi l'action premiére & inſtantanée de la cauſe motrice eſt capable de mouvoir le Corps, il ſera mû uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cauſe ne l'en empêchera pas.

Dans le ſecond cas, puiſqu'on ſuppoſe qu'aucune cauſe étrangere & différente de la cauſe motrice n'agit ſur le Corps, rien ne détermine donc la cauſe motrice à augmenter ni à diminuer ; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme & constante, & qu'ainsi pendant le tems qu'elle agira, le Corps se mouvra en ligne droite & uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment & uniformément pendant un certain tems, subsistant toujours tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, & produire constamment le même effet. Donc &c.

Donc en général un Corps mis en mouvement par quelque cause que ce soit, y persistera toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui.

La ligne droite qu'un Corps décrit ou tend à décrire, est nommée *sa direction.*

REMARQUE.

7. Je me suis un peu étendu sur la preuve de cette seconde Loi, parce qu'il y a eu & qu'il y a même encore quelques Philosophes qui prétendent que le mouvement d'un Corps doit de lui-même se ralentir peu à peu, comme il semble que l'Expérience le prouve. Il faut convenir, au reste, que toutes les preuves qu'on a données jusqu'ici de la conservation du mouvement, n'ont point le degré d'évidence nécessaire pour convaincre l'esprit ; elles sont presque toutes fondées, ou sur une force qu'on imagine dans la matiére, par laquelle elle résiste à tout changement d'état, ou sur l'indifférence de la matiére au mou-

vement comme au repos. Le premier de ces deux Principes, outre qu'il ſuppoſe dans la matiére un Etre dont on n'a point d'idée nette, ne peut ſuffire pour prouver la Loi dont il eſt queſtion. Car un Corps qui ſe meut même uniformément, ſe trouve à chaque inſtant dans un nouvel état, à parler exactement; il ne fait, pour ainſi dire, continuellement que commencer à ſe mouvoir, & on pourroit croire qu'il tendroit ſans ceſſe à retomber dans le repos, ſi la même cauſe qui l'en a tiré d'abord, ne continuoit en quelque ſorte à l'en tirer toujours.

A l'égard de l'indifférence de la matiére au Mouvement ou au repos, tout ce que ce Principe préſente, ce me ſemble, de bien diſtinct à l'eſprit, c'eſt qu'il n'eſt pas eſſentiel à la matiére de ſe mouvoir toujours, ni d'être toujours en repos; mais il ne s'enſuit pas de cette Loi, qu'un Corps en Mouvement ne puiſſe tendre continuellement au repos, non que le repos lui ſoit plus eſſentiel que le mouvement, mais parce qu'il pourroit ſembler qu'il ne faudroit autre choſe à un Corps pour être en repos, que d'être un Corps, & que pour le Mouvement il auroit beſoin de quelque choſe de plus, & qui devroit être, pour ainſi dire, continuellement créé en lui.

La démonſtration que j'ai donnée de la conſervation du Mouvement, a cela de particulier, qu'elle a lieu également, ſoit que la cauſe motrice doive toujours être appliquée au Corps, ou non. Ce n'eſt pas que je croye l'action continuée de cette cauſe, néceſſaire pour mouvoir le Corps; car ſi l'action inſtantanée ne ſuffiſoit pas, quel seroît alors l'effet de cette action ? & si l'action instantanée n'avoit point d'effet, comment l'action continuée en auroit-t'elle ? Mais comme on doit employer à la solution d'une question le moins de Principes qu'il est possible, j'ai cru devoir me borner à démontrer que la continuation du Mouvement a lieu également dans les deux hypotheses ; il est vrai que notre démonstration suppose l'éxistence du Mouvement, & à plus forte raison sa possibilité ; mais nier que le Mouvement existe, c'est se refuser à un fait que personne ne révoque en doute.

Du Mouvement uniforme.

8. Nous venons de voir qu'un Corps se meut uniformément & en ligne droite, quand aucune cause étrangere n'agit sur lui. D'où il s'ensuit que ce même Corps peut encore se mouvoir uniformément, lorsque deux causes étrangeres agissent en même-tems & également, l'une pour accélérer, l'autre pour retarder son Mouvement, (c'est ainsi, pour le dire en passant, que les Corps qui tombent parviennent à se mouvoir uniformément, lorsque la résistance du Fluide où ils se meuvent tend à diminüer leur mouvement, autant que leur pesanteur tend à l'augmenter). Dans tout autre cas, le Mouvement est nécessairement accéléré ou retardé.

9. Si deux parties quelconques AB, AC (Fig. 2) d'une ligne indéfinie AO représentent deux portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, & les lignes BD, CE, les espaces parcourus durant ces tems

tems par un Corps dont le Mouvement eſt uniforme, les points *D*, *E*, ſeront à une ligne droite *ADE*.

Car, puiſqu'un Corps qui ſe meut uniformément parcourt des eſpaces égaux en tems égaux, les points *D*, *E*, doivent être à une ligne telle, que ſi on prend *AB*, *BC* égales entr'elles & quelconques, on ait toujours $BD = FE$. Or cette propriété n'appartient qu'à la ligne droite. Donc &c.

COROLLAIRE.

10. $BD \cdot CE :: AB \cdot AC$. C'eſt-à-dire, que dans le Mouvement uniforme, les eſpaces ſont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.

REMARQUE *ſur la meſure du tems.*

11. Comme le rapport des parties du tems nous eſt inconnu en lui-même, l'unique moyen que nous puiſſions employer pour découvrir ce rapport, c'eſt d'en chercher quelqu'autre plus ſenſible & mieux connu, auquel nous puiſſions le comparer; on aura donc trouvé la meſure du tems la plus ſimple, ſi on vient à bout de comparer de la maniére la plus ſimple qu'il ſoit poſſible, le rapport des parties du tems, avec celui de tous les rapports, que l'on connoît le mieux. Delà il réſulte que le Mouvement uniforme eſt la meſure du tems la plus ſimple. Car d'un côté, le rapport des parties d'une ligne droite eſt celui que nous ſaiſiſſons le plus facilement; & de l'autre, il

n'y a point de rapports plus aisés à comparer entr'eux, que des rapports égaux. Or dans le Mouvement uniforme, le rapport des parties du tems est égal à celui des parties correspondantes de la ligne parcourue. Le Mouvement uniforme nous donne donc tout à la fois le moyen, & de comparer le rapport des parties du tems au rapport qui nous est le plus sensible, & de faire cette comparaison de la maniére la plus simple; nous trouvons donc dans le Mouvement uniforme, la mesure la plus simple du tems.

Je dis, outre cela, que la mesure du tems par le Mouvement uniforme, est, indépendamment de sa simplicité, celle dont il est le plus naturel de penser à se servir. En effet, comme il n'y a point de rapport que nous connoissions plus exactement que celui des parties de l'espace, & qu'en général un Mouvement quelconque dont la loi seroit donnée, nous conduiroit à découvrir le rapport des parties du tems, par l'analogie connue de ce rapport avec celui des parties de l'espace parcouru; il est clair qu'un tel Mouvement seroit la mesure du tems la plus exacte, & par conséquent celle qu'on devroit mettre en usage préférablement à toute autre. Donc, s'il y a quelque espece particuliére de Mouvement, où l'analogie entre le rapport des parties du tems & celui des parties de l'espace parcouru, soit connue indépendamment de toute hypothese, & par la nature du Mouvement même, & que cette espece particuliére de Mouvement soit la seule à qui cette propriété appartienne, elle sera nécessairement la mesure du tems la plus naturelle. Or il n'y a que le Mouvement uniforme qui réunisse les deux conditions dont nous venons de parler. Car (*art.* 6) le Mouvement d'un Corps est uniforme par lui-même : il ne devient accéléré ou retardé qu'en vertu d'une cause étrangere ; & alors il est susceptible d'une infinité de loix différentes de variation. La loi d'uniformité, c'est-à-dire l'égalité entre le rapport des tems & celui des espaces parcourus, est donc une propriété du Mouvement consideré en lui-même. Le Mouvement uniforme n'en est par-là que plus analogue à la durée, & par conséquent plus propre à en être la mesure, puisque les parties de la durée se succedent aussi constamment & uniformément. Au contraire, toute loi d'accélération ou de diminution dans le Mouvement, est arbitraire, pour ainsi dire, & dépendante de circonstances extérieures. Le Mouvement non uniforme ne peut être par conséquent la mesure naturelle du tems ; car en premier lieu, il n'y auroit pas de raison pourquoi une espece particuliére de Mouvement non uniforme, fut la mesure premiére du tems plutôt qu'une autre : en second lieu, on ne pourroit mesurer le tems par un Mouvement non uniforme, sans avoir découvert auparavant par quelque moyen particulier l'analogie entre le rapport des tems & celui des espaces parcourus, qui conviendroit au Mouvement proposé. D'ailleurs, comment connoître cette analogie autrement que par l'Expérience, & l'Expérience ne supposeroit-elle pas qu'on eût déja une mesure du tems fixe & certaine ?

Mais le moyen de s'assurer, dira-t'on, qu'un Mouvement soit parfaitement uniforme? je réponds d'abord, qu'il n'y a non plus aucun Mouvement non uniforme dont nous sachions exactement la Loi, & qu'ainsi cette difficulté prouve seulement que nous ne pouvons connoître exactement & en toute rigueur le rapport des parties du tems; mais il ne s'ensuit pas delà, que le Mouvement uniforme n'en soit par sa nature seule, la premiére & la plus simple mesure. Aussi ne pouvant avoir de mesure du tems précise & rigoureuse, c'est dans les Mouvemens à peu près uniformes, que nous en cherchons la mesure au moins approchée. Nous avons deux moyens de juger qu'un Mouvement est à peu près uniforme; ou quand nous savons que l'effet de la cause accélératrice ou retardatrice ne peut être qu'insensible; ou quand nous le comparons à d'autres Mouvemens, & que nous observons la même Loi dans les uns & les autres. Ainsi, si plusieurs Corps se meuvent, de maniére que les espaces qu'ils parcourent durant un même tems soient toujours entr'eux, ou exactement, ou à peu près dans le même rapport, on juge que le Mouvement de ces Corps est ou exactement, ou au moins à très-peu près uniforme.

12. Un Corps qui se meut uniformément est dit se mouvoir d'autant plus *vîte*, que l'espace BD qu'il parcourt dans un même tems AB, est plus grand; desorte que si BD, Bd sont les espaces parcourus uniformément par deux Corps dans le même tems AB, on dit que les *vitesses* de ces deux Corps sont entr'elles comme BD à Bd.

COROLLAIRE.

13. *BD* eſt à *Bd* :: $\frac{BD}{AB} \cdot \frac{Bd}{AB} :: \frac{BD}{AB} \cdot \frac{Ce}{AC}$, donc en général les viteſſes de deux Corps ſont entr'elles comme les eſpaces *BD*, *CE* qu'ils parcourent dans des tems quelconques, ces eſpaces étant diviſés par les tems employés à les parcourir.

La viteſſe d'un Corps mû uniformément, eſt donc en général comme l'eſpace diviſé par le tems.

Du Mouvement acceleré ou retardé.

14. Si les lignes *BD*, *CE*, (Fig. 3 & 4.) repréſentant les eſpaces parcourus pendant les tems *AB*, *AC*, ne ſont pas à une ligne droite, mais à une Courbe *ADE*, alors le Mouvement n'eſt plus uniforme, mais il eſt accéléré ou retardé, ſelon que la Courbe *ADE* eſt convexe ou concave vers *AC*, & cette variation continuelle ne peut provenir que de quelque cauſe étrangére qui agit ſans ceſſe, pour accélérer ou retarder le Mouvement.

La viteſſe du Corps mû change alors à chaque inſtant, & ne peut avoir, comme dans le Mouvement uniforme, une quantité conſtante pour meſure. On conçoit ſeulement que ſon expreſſion pour un inſtant donné, doit être la même qu'elle ſeroit, ſi dans cet inſtant le Mouvement ceſſoit d'être accéléré ou retardé. Suppoſons donc qu'à l'inſtant même où le Corps finit de parcourir la ligne *BD*, il vienne à ſe mouvoir uniformément avec la viteſſe qu'il a en D; il eſt clair, en tirant la Tangente DN, que PN ſeroit l'eſpace qu'il parcoureroit dans le tems BC au lieu de PE. Dans ce cas (*art.* 13) $\frac{PN}{DP}$ exprimeroit ſa viteſſe; or le rapport de PN à DP, eſt le même que celui de l'Elément de AB à l'Elément de BD, parce que DN eſt tangente. Donc ſi on nomme en général t le tems, e l'eſpace correſpondant parcouru par le Corps, u la viteſſe à la fin du tems t, on aura $u = \frac{de}{dt}$.

Si on prolonge la Tangente DN juſqu'à ce qu'elle rencontre AB en F; il eſt clair que BF exprimera le tems que le Corps employeroit à parcourir uniformément BD avec la viteſſe qu'il a au point D. Donc ſi par le point A on tire Ad paralléle à FD; Bd ſera l'eſpace que ce même Corps parcoureroit uniformément avec cette même viteſſe dans le tems AB.

On voit par-là (Fig. 3) que ſi ADE par exemple eſt une parabole, c'eſt-à-dire, ſi les eſpaces BD, CE ſont entr'eux comme les quarrés des tems, on aura $AB = 2BF$; & $Bd = 2BD$.

COROL. I.

15. Les eſpaces NE, ne, ſont les eſpaces que le Corps parcourt pendant les tems BC, Bc, de plus ou de moins que les eſpaces PN, pn qu'il eût parcouru uniformément avec la viteſſe qu'il a en D. Or ſi on ſuppoſe les tems

BC, Bc, infiniment petits, les lignes NE, Ne, sont entr'elles comme le quarré de BC au quarré de Bc. Car l'arc DE à cause de sa petitesse infinie, peut être regardé comme un arc de cercle; or soit DN (Fig. 5) la portion infiniment petite de la Tangente d'un arc de cercle, & par le point N, & un autre point n quelconque de cette partie, soient tirées à volonté les paralléles NQ, nq, on aura par la propriété du cercle $NE \times NQ = DN^2$; $ne \times nq = Dn^2$; & à cause que les lignes nq, NQ doivent être regardées comme égales, on aura $NE \,.\, ne :: DN^2 \,.\, Dn^2$. Or (Fig. 3 & 4) $DN \,.\, Dn :: BC \,.\, Bc$, & par conséquent en général $NE \,.\, ne :: BC^2 \,.\, Bc^2$.

Corol. II.

16. Il est clair que les espaces NE, ne, seroient ceux que la *cause accélératrice* feroit parcourir au Corps, dans les instans BC, Bc, si au commencement de ces instans il n'avoit aucune vitesse. Donc les espaces parcourus par un Corps en vertu d'une puissance accélératrice quelconque, sont au commencement du Mouvement comme les quarrés des tems.

Corol. III.

17. Si on suppose $BC = dt$ & constant, & qu'on regarde la Courbe ADE comme un polygone d'une infinité de côtés, qui prolongés deviennent ses Tangentes, NE sera la différence seconde de l'espace parcouru BD,

& en général on peut ſuppoſer que l'Equation différentio-différentielle de la Courbe ADE eſt $\varphi dt^2 = \pm dde$ φ exprimant une fonction quelconque de e & de t, ou même de ces grandeurs & de leurs différences; le ſigne $+$ étant pour le cas où le Mouvement eſt accéléré, c'eſt-à-dire, ou la Courbe ADE eſt convexe vers AC, & le ſigne $-$ pour le cas où le Mouvement eſt retardé, c'eſt-à-dire, où la Courbe ADE eſt concave vers AC.

Corol. IV.

18. Puiſque (*art.* 14) $u = \frac{de}{dt}$, on aura à cauſe de dt conſtant, $dde = dudt$; donc l'Equation précedente $\varphi dt^2 = \pm dde$ ſe changera en celle-ci $\varphi dt = \pm du$, ou $\varphi de = \pm udu$.

Remarque I.

Sur les forces accélératrices.

19. Le Mouvement uniforme d'un Corps ne peut être alteré que par quelque cauſe étrangére. Or de toutes les cauſes, ſoit occaſionnelles, ſoit immédiates, qui influent dans le Mouvement des Corps, il n'y a tout au plus que l'impulſion ſeule dont nous ſoyons en état de déterminer l'effet par la ſeule connoiſſance de la cauſe, comme on le verra dans la ſeconde partie de cet Ouvrage. Toutes les autres cauſes nous ſont entiérement inconnues; elles ne peuvent par conſéquent ſe manifeſter à nous, que par l'effet qu'elles produiſent en accélérant ou retardant le Mouvement

vement du Corps, & nous ne pouvons les diſtinguer les unes des autres que par la Loi & la grandeur connue de leurs effets, c'eſt-à-dire, par la Loi & la quantité de la variation qu'elles produiſent dans le Mouvement. Donc, lorſque la cauſe eſt inconnue, ce qui eſt le ſeul cas dont il ſoit queſtion ici, l'Equation de la Courbe *ADE* doit être donnée immédiatement, ou en termes finis, ou en quantités différentielles. L'Equation eſt donnée ordinairement en différences, lorſque le Mouvement eſt accéléré ou retardé ſuivant une loi arbitraire & de pure hypotheſe. Elle eſt au contraire donnée ordinairement en termes finis, quand la Loi du rapport des eſpaces aux tems eſt découverte par l'Expérience. Ainſi ſuppoſons que la puiſſance qui accélére, ſoit telle que le Corps reçoive continuellement dans des inſtans égaux des degrés égaux de viteſſe; alors dt étant conſtant, du le ſera auſſi, & par conſéquent φ ſera une quantité conſtante. L'Equation $\varphi dt = du$ ſera en ce cas donnée immédiatement par hypotheſe. Suppoſons, au contraire, que dans un cas particulier on découvre par l'Expérience que les eſpaces finis parcourus depuis le commencement du Mouvement, ſont comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'Equation de la Courbe *ADE* ſera $e = \frac{t^2}{a}$, d'où l'on tire $dde = \frac{2dt^2}{a}$ & $du = \frac{2dt}{a}$. On voit par-là que dans cette ſuppoſition les accroiſſemens de viteſſe à chaque inſtant ſont égaux, & les Equations différentielles $\varphi dt^2 = \pm dde$

$\varphi dt = \pm du$, ſe tirent de l'Equation donnée de la Courbe ADE en termes finis.

Il eſt donc évident que quand la cauſe eſt inconnue, l'Equation $\varphi dt = \pm du$ eſt toujours donnée.

La plûpart des Geométres préſentent ſous un autre point de vûe l'Equation $\varphi dt = du$ entre les tems & les viteſſes. Ce qui n'eſt, ſelon nous, qu'une hypotheſe, eſt érigée par eux en Principe. Comme l'accroiſſement de la viteſſe eſt l'effet de la cauſe accélératrice, & qu'un effet, ſelon eux, doit être toujours proportionnel à ſa cauſe, ces Geométres ne regardent pas ſeulement la quantité φ comme la ſimple expreſſion du rapport de du à dt; c'eſt de plus, ſelon eux, l'expreſſion de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant conſtant; delà ils tirent cet axiôme général, que le produit de la force accélératrice par l'Elément du tems eſt égal à l'Elément de la viteſſe. M. *Daniel Bernoulli* (*Mém. de Peterſb. to.* I.) prétend que ce Principe eſt ſeulement de verité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cauſe & la maniére dont elle agit, nous ne pouvons ſavoir ſi ſon effet lui eſt réellement proportionnel, ou s'il n'eſt pas comme quelque puiſſance ou quelque fonction de cette même cauſe. M. *Euler*, au contraire, s'eſt efforcé de prouver fort au long dans ſa Mécanique, que ce Principe eſt de verité néceſſaire. Pour nous, ſans vouloir diſcuter ici ſi ce Principe eſt de verité néceſſaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition, & d'entendre ſeulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnel. Ainsi au lieu de dire que l'accroissement de vitesse à chaque instant est constant, ou que cet accroissement est comme le quarré de la distance du Corps à un point fixe, ou &c. nous dirons simplement pour abreger & pour nous conformer d'ailleurs au langage ordinaire, que la force accélératrice est constante, ou qu'elle est comme le quarré de la distance; ou &c. & en général, nous ne prendrons jamais le rapport de deux forces que pour celui de leurs effets, sans examiner si l'effet est réellement comme sa cause, ou comme une fonction de cette cause : examen entiérement inutile, puisque l'effet est toujours donné indépendamment de la cause, ou par expérience, ou par hypothese.

Ainsi nous entendrons en général par la force motrice le produit de la masse qui se meut par l'Elément de sa vitesse, ou ce qui est la même chose par le petit espace qu'elle parcourroit dans un instant donné en vertu de la cause qui accélére ou retarde son Mouvement; par force accélératrice, nous entendrons simplement l'Elément de la vitesse. Après de pareilles définitions, il est aisé de voir que tous les problêmes qu'on peut proposer sur le Mouvement des Corps mûs en ligne droite, & animés par des forces qui tendent vers un centre, ou exerçant les uns sur les autres une Attraction mutuelle suivant une Loi quelconque, sont des problêmes qui appartiennent pour le moins autant à la Geométrie qu'à la Mécanique, &

dans lesquels la difficulté n'est que de calcul, pourvû que le mobile soit regardé comme un point.

On imagineroit peut-être que l'Equation $\varphi dt = \pm du$ regardée, non comme hypothese, mais comme Principe, seroit au moins nécessaire pour calculer les effets dont les causes sont connues, comme l'impulsion, surtout quand cette impulsion consiste en de petits coups réïtérés. J'espere qu'on verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage, que non-seulement ce Principe y est inutile, mais que l'application en est insuffisante & pourroit même être fautive.

REMARQUE II.

Sur la comparaison des forces accélératrices entr'elles.

20. Si dans un Cercle quelconque PQD (Fig. 5) on tire les cordes égales & infiniment petites PD, DE, & qu'on prolonge PD en O, ensorte que $DO = PD$; qu'enfin on mene par les points O, E la ligne OQ, & par le point D la Tangente DN qui rencontre OQ en N, on aura par la propriété du Cercle $DN^2 = NE \times NQ$; $OD \times OP$ ou $2DO^2 = OE \times OQ$.* Donc à cause que les lignes DN & DO, NQ & OQ doivent être

* Lorsque les lignes PD, DE, DO sont égales, on peut démontrer rigoureusement que $OE = 2NE$. Car le Triangle DOE est isocele, l'Angle ODE a pour mesure la moitié de l'Arc PDE, & l'Angle NDE la moitié de l'Arc DE. D'où il s'ensuit que DN divise l'Angle ODE en deux également, & qu'ainsi à cause de $DO = DE$, on a $OE = 2NE$.

Mais la démonstration que nous avons donnée s'étend encore au cas où PD, DE, DO ne seroient pas exactement égales, & où leur différence seroit infiniment petite par rapport à elles.

regardées comme égales, on aura $OE = 2NE$.

Donc si on considére l'Elément DE d'une Courbe quelconque ADE comme un petit Arc de cercle, ce qu'on peut supposer sans erreur ; il s'ensuit que la différence seconde NE de l'espace parcouru, est double de l'espace réel que la puissance accélératrice feroit parcourir au Corps dans l'instant BC, quoiqu'elle paroisse lui être égale dans la Courbe considerée comme Polygone, parce que la Tangente DN n'est alors que le prolongement du petit côté de la Courbe.

Nous avons vû ci-dessus (*art.* 13) que quand les espaces parcourus sont comme les tems correspondans, un Corps qui parcourt un espace E dans le tems T, parcourroit uniformément dans le même tems l'espace $2E$ avec la vitesse qu'il a à l'extrêmité de l'espace E. D'où il s'ensuit que dans la Courbe polygone, NE considerée comme l'effet de la puissance accélératrice ou retardatrice, doit être regardée comme parcourüe d'un Mouvement uniforme avec la vitesse infiniment petite que le Corps a acquis à la fin de l'instant BC. En effet, dans la Courbe Polygone, les lignes NE, ne ne sont plus entr'elles comme les quarrés des tems, mais comme les tems simples. On voit par-là de quelle maniére on peut réduire à un Mouvement uniforme l'effet instantané de la puissance qui accélére ou qui retarde le Mouvement.

Il faut, au reste, bien prendre garde à cette distinction des Courbes polygones & des Courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. *Voyez l'Hist. de l'Acad. de 1722.*

CHAPITRE II.

Du Mouvement composé.

THEORÊME.

21. *SI deux puissances quelconques agissent à la fois sur un Corps ou point* A (Fig. 6) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* ABCD; *je dis que le Corps* A *parcourra la Diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB *ou* AC.

Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le Corps A; il est certain (*art. 6*) que cette ligne sera une ligne droite, & que le Corps A la parcourra uniformément. Il n'est pas moins évident qu'elle sera dans le plan des lignes AB, AC, puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, si lorsque le Corps est arrivé à un point quelconque g de cette ligne, on ſuppoſoit, que deux puiſſances vinſſent à agir ſur lui, dont l'une tendît à le mouvoir ſuivant gc paralléle à AC avec la même viteſſe qu'il a en A ſuivant AC, & en ſens contraire, & l'autre tendit à lui faire parcourir la ligne go égale & paralléle à AB, & en ſens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il eſt clair que le Corps reſteroit en repos au point g. Car ſa viteſſe & ſa direction au point g eſt préciſément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puiſſances égales & paralléles aux puiſſances ſuivant AB & AC, & par conſéquent égales & contraires aux puiſſances ſuivant go, gc.

Cela poſé, imaginons que le Corps A qui décrit la ligne Ag, ſoit ſur un plan $CLMH$ qui puiſſe gliſſer librement entre les deux couliſſes KL, IM paralléles à AC. Qu'on faſſe mouvoir ce plan entre les deux couliſſes, de maniére que tous ſes points g décrivent des lignes gc égales & paralléles à AC, dans le même tems que le Corps A eut décrit la ligne AC, & qu'en même tems les deux couliſſes ſe meuvent en emportant le plan parallélement à AB, & en ſens contraire, avec une viteſſe égale à celle que le Corps A auroit en ſuivant AB; il eſt évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales & paralléles à la Diagonale AD du parallélogramme BC. Il eſt de plus évident que le point g, tiré continuellement en cet état par quatre puiſſances contraires & égales deux à deux, doit reſter en repos dans l'eſpace abſolu. D'où il s'enſuit, que quand il est arrivé à un point g du plan, ce point g doit se trouver à la place que le Corps occupoit quand il a commencé de se mouvoir. Ce qui ne sauroit être, à moins que la ligne Ag ne tombe sur la Diagonale AD. De plus, si on prend $gc = AC$, $go = AB$, on verra que le point g doit tomber sur le point D, parce que $ga = AD$, & que le point a doit tomber sur le point A. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

REMARQUE.

22. La démonstration qu'on apporte d'ordinaire du Theorême précedent, consiste à imaginer que le point A se meuve uniformément sur une regle AB avec la vitesse qu'il a reçu suivant AB, & qu'en même tems la ligne ou regle AB se meuve suivant AC avec la vitesse que le Corps A a reçu suivant AC. On prouve très-bien dans cette supposition, que le point mobile A décrit la Diagonale AD. En général la plûpart des démonstrations communes de cette proposition sont fondées sur ce qu'on regarde les deux puissances suivant AB & AC, comme agissant sur le Corps A pendant tout le tems de son Mouvement, ce qui n'est pas précisément l'état de la question. Car l'hypothese est, que le Corps A tend à se mouvoir au premier instant suivant AB & AC à la fois, & l'on demande la direction & la vitesse qu'il doit avoir en vertu du concours d'action des deux puissances. Dès qu'il a pris une direction moyenne AD, les deux tendances suivant AB & AC n'existent plus; il

n'y

n'y a plus de réel que sa tendance suivant *AD*.

J'ai donc cru devoir prévenir cette difficulté, & faire voir que le chemin du Corps *A* est le même, soit que les deux puissances n'agissent sur lui que dans le premier instant, soit qu'elles agissent continuellement toutes deux à la fois sur le Corps. C'est à quoi je crois être parvenu dans la démonstration que j'ai donnée ci-dessus.

COROLLAIRE I.

23. Si un Corps parcourt ou tend à parcourir une ligne droite *AC* (Fig. 7) avec une vitesse quelconque, & qu'on prenne un point *B* partout où l'on voudra sur cette ligne *AC* prolongée ou non, la vitesse *AC* pourra être regardée comme composée de la vitesse *AB* & de la vitesse *BC*. Car *AC* peut être regardée comme la Diagonale d'un parallélogramme, dont *AB*, *BC* sont les côtés. Donc &c.

REMARQUE.

24. Quelques Lecteurs pourront être surpris de ce que je tire la démonstration d'une proposition si simple en apparence, d'un cas général beaucoup plus composé; mais on ne peut, ce me semble, démontrer autrement la proposition dont il s'agit ici, qu'en regardant comme un axiôme incontestable, que l'effet de deux causes conjointes est égal à la somme de leurs effets pris séparément, ou que deux causes agissent conjointement comme elles agiroient séparément; principe qui ne me paroît pas assez évident, ni assez simple, qui tient d'ailleurs de trop près

à la question des forces vives, & au Principe des forces accélératrices, dont nous avons parlé ci-dessus *art.* 19. C'est la raison qui m'a obligé à éviter d'en faire usage, ayant d'ailleurs pour but dans ce Traité de réduire la Mécanique au plus petit nombre de Principes possible, & de tirer tous ces Principes de la seule idée du Mouvement, c'est-à-dire, de l'espace parcouru & du tems employé à le parcourir, sans y faire entrer en aucune façon les puissances & les causes motrices.

Corol. II.

25. Si un Corps est poussé suivant AB & AC (Fig. 8) par deux puissances accélératrices quelconques, sa direction sera la Diagonale d'un parallélogramme fait sur des côtés AB, AC, proportionnels aux forces accélératrices suivant AB & AC, & sa force accélératrice suivant AD sera à chacune des deux suivant AB & AC, comme AD est à AB & AC. Car soient Ab & Ac les espaces que le Corps A eût parcouru dans le commencement de son Mouvement en vertu de chacune des puissances, on aura (*art.* 19.) $Ab . Ac :: AB . AC$. donc les lignes bd, cd, paralléles à AC, AB concourront au point d de la Diagonale AD. De même si $A\beta$, Ax, sont les espaces parcourus en tems égaux en vertu de ces mêmes puissances, on aura $Ab . A\beta ::$ le quarré du tems par Ab ou par Ac au quarré du tems par $A\beta$ ou par Ax, c'est-à-dire, comme Ac est à Ax; donc le point de concours δ des lignes $\beta\delta$, $x\delta$, sera encore sur la Diago-

nale AD. Donc si on suppose que le Corps A se meuve sur la regle AB au premier instant, avec la force accélératrice qu'il a suivant AB, & que la puissance accélératrice suivant AC, agisse en même-tems sur la regle pour la porter de A vers C, le point A décrira la Diagonale Ad, dans le même-tems qu'il auroit décrit Ab ou Ac, & sa force accélératrice suivant AD, sera à chacune des forces suivant les côtés, comme la Diagonale à chacun de ces mêmes côtés.

Delà on voit, comment à une force accélératrice quelconque, on peut en substituer d'autres, en tel nombre qu'on voudra.

Au reste, comme nous avons vû ci-dessus (*art.* 20) de quelle maniére on peut réduire à un Mouvement uniforme l'effet instantané d'une puissance quelconque ; il est clair que la combinaison des effets de tant de puissances qu'on voudra, & la recherche de l'effet unique qui en résulte, se réduit par-là fort aisément aux Loix du Mouvement composé uniforme.

Du Mouvement en ligne courbe, & des forces centrales.

26. Comme un Corps tend de lui-même à se mouvoir en ligne droite, il ne peut décrire une ligne Courbe, qu'en vertu de l'action d'une puissance qui le détourne continuellement de sa direction naturelle. On peut déduire de l'article précédent, les Principes du Mouvement d'un Corps sur une Courbe.

Il eſt démontré qu'un Arc infiniment petit d'une Courbe quelconque, peut être pris pour un Arc de cercle, dont le rayon ſeroit égal au rayon de la développée de cet Arc de la Courbe. On réduit par ce moyen le Mouvement d'un Corps ſur une Courbe quelconque, au Mouvement de ce même Corps ſur un cercle dont le rayon change à chaque inſtant.

La puiſſance qui retient un Corps ſur une Courbe, eſt appellée particuliérement *force centrale*, quand elle eſt toujours dirigée vers un point fixe; mais nous la nommerons ici, *force centrale* en général, ſoit qu'elle tende vers un point fixe ou non. Cette puiſſance n'eſt par ſa nature qu'une puiſſance accélératrice ou retardatrice, dont la direction eſt différente de celle du Corps. On peut, par tout ce qui a été dit ci-deſſus, (*art.* 24 & 25) réduire à un Mouvement uniforme l'effet inſtantané de cette puiſſance, en regardant comme un Polygone d'une infinité de côtés la Courbe qu'elle fait décrire au Corps, & cet effet eſt double de celui que la force centrale produiroit dans la Courbe conſiderée exactement comme Courbe. Ainſi, ſuppoſons qu'un Corps décrive un Arc de cercle infiniment petit *PDE*, (Fig. 5) en vertu d'une puiſſance, qui, au point *D* le détourne de la ligne droite ſuivant une direction donnée: ſi on regarde le cercle comme un Polygone, la petite corde *PD* ſera la ligne qu'il aura décrite dans l'inſtant précédent, & *DO* égale & en ligne droite avec *PD*, celle qu'il tend à décrire l'inſtant ſuivant. Donc tirant *OE* paralléle à la direction de la force centrale en *D*, *OE* ſera l'effet inſtantané de cette puiſſance ; au contraire, ſi on conſidéroit le cercle comme cercle rigoureux, la Tangente *DN* ſeroit la ligne que le Corps tendroit à décrire, & *NE* l'effet de la puiſſance qui le retiendroit ſur la Courbe.

La ligne *NE* diviſée par le quarré du tems employé à la parcourir, eſt (*art.* 17. 18 & 19) l'expreſſion de la force accélératrice en vertu de laquelle le Corps décrit la Courbe ; or cette ligne *NE* eſt égale au quarré de la ligne *DN* ou de l'Arc *DE* ou *PD*, diviſé par *NQ*, & *NQ* eſt au diamétre du cercle, comme le Sinus de l'angle que fait la force centrale avec la Courbe, eſt au Sinus total ; de plus, la ligne *DE* diviſée par le tems employé à la parcourir, eſt (*art.* 14) l'expreſſion de la viteſſe du Corps. Donc, dans une Courbe quelconque, l'effet de la force centrale eſt comme le quarré de la viteſſe diviſé par le rayon de la développée, & multiplié par le rapport qu'il y a entre le Sinus de l'angle que fait cette force avec la Courbe, & le Sinus total.

En général, l'Elément du tems étant ſuppoſé conſtant, la force centrale eſt repréſentée par la ligne *OE* dans la Courbe Polygone, & par *NE* dans la Courbe rigoureuſe. Il faut, par conſéquent, avoir égard à cette différence d'expreſſion dans la comparaiſon des effets de deux forces centrales, & pour ne pas faire l'un des effets double de ce qu'il eſt par rapport à l'autre, il faut conſidérer les deux Courbes, ou toutes deux comme Polygones, ou toutes deux comme rigoureuſes.

Les forces centrales, & en général toutes les forces accélératrices (si par le mot de *forces* nous n'entendons que les effets) sont entr'elles comme les petits espaces qu'un Corps parcourt dans un même instant en vertu de ces forces. On a coutume de comparer toutes ces forces à la force accélératrice constante que nous connoissons le mieux, je veux dire à la pesanteur. Si E est l'espace qu'un Corps pesant parcourt dans un tems fini T, $\frac{E\,dt^2}{T^2}$ sera l'espace qu'il parcourra dans le tems dt, & si l'Arc DE est supposé parcouru dans le même-tems dt, la force centrale sera à la pesanteur, comme la ligne NE à $\frac{E\,dt^2}{T^2}$, ou comme OE à $\frac{2E\,dt^2}{T^2}$.

Or soit r le rayon de la développée de la Courbe en N, S le Sinus de l'angle que fait la direction de la force centrale avec la Courbe, A le Sinus total, e l'espace que le Corps parcourroit uniformément dans le tems T avec la vitesse qu'il a en D, on aura $DE = \frac{e\,dt}{T}$; $OE = \frac{DE^2}{r} \times \frac{S}{A} = \frac{e^2 dt^2 . S}{T^2 A r}$. Donc l'effet instantané de la pesanteur est à celui de la force centrale, comme $2E$ à $\frac{e^2 S.}{Ar}$ & ainsi le rapport de ces deux effets, que la plûpart des Géométres prennent pour celui des causes même, est exprimé en termes finis.

CHAPITRE III.

Du Mouvement détruit ou changé par des obstacles.

27. UN Corps qui se meut, peut rencontrer des obstacles qui altérent, ou même qui anéantissent tout-à-fait son Mouvement; ces derniers sont, ou invincibles par eux-mêmes, ou n'ont précisément de résistance, que ce qu'il en faut pour détruire le Mouvement imprimé au Corps.

Un obstacle invincible peut être tel, qu'il ne permette au Corps aucun Mouvement, comme quand un Corps tire une verge droite attachée à un point fixe; ou l'obstacle pourroit être de telle nature, qu'il n'empêchât pas le Corps de se mouvoir dans une autre direction que celle qu'il a, comme quand un Corps rencontre un plan inébranlable.

28. Si l'obstacle, invincible ou non, que le Corps rencontre, ne fait qu'altérer & changer son Mouvement sans le détruire, ensorte que le Corps ayant, par exemple, la vitesse *a* avant de rencontrer l'obstacle, il soit obligé de prendre une vitesse *b* dont la quantité & la direction soit différente de la premiére; il est évident qu'on peut regarder la vitesse *a* que le Corps a lorsqu'il rencontre l'obstacle, comme composée de la vitesse *b* & d'une autre vitesse *c*, & qu'il n'y a que la vitesse *c* qui ait été détruite par l'obstacle.

29. Delà il s'ensuit, qu'un Corps sans ressort qui vient choquer perpendiculairement un plan immobile & impénétrable, doit s'arrêter après ce choc, & rester en repos. Car il est visible que si ce Corps a du Mouvement après la rencontre du plan, ce ne peut être qu'en arriére, & dans la direction de la perpendiculaire; soit u sa vitesse avant le choc, v sa vitesse en arriére, que je suppose $= mu$, m exprimant un nombre inconnu quelconque, on aura donc (*art.* 28) $u = -mu, + u + mu$. Donc $u + mu$ est la vitesse perdue par le Corps à la rencontre du plan. Mais il n'y a point de raison pourquoi m soit plutôt tel nombre que tel autre. Car la seule condition par laquelle on puisse déterminer la vitesse $u + mu$, est qu'elle doit être détruite par le plan : or puisque (*hyp.*) le plan est inébranlable, il n'y a point de raison pourquoi il anéantiroit plutôt la vitesse $u + mu$, qu'une autre vitesse $u + nu$. Donc le nombre m ne peut être plutôt tel nombre que tel autre, donc il sera zero. Donc mu, & par conséquent v sera $= 0$. D'ailleurs, si la vitesse $u + mu$ est anéantie par la rencontre du plan, à plus forte raison la vitesse u pourra être détruite par la rencontre de ce même plan. Donc &c.

COROL. I.

30. Si on suppose qu'un Corps A (Fig. 9) mû suivant AB, rencontre le plan immobile & impénétrable BD sur lequel il soit forcé de se mouvoir, sa vitesse suivant BD sera à sa vitesse suivant AB ou BC, comme le

le Sinus du complément de l'angle *CBD* au Sinus total. Car il faudra regarder la viteſſe *BC*, comme compoſée de deux autres, dont l'une *BE* ſoit perpendiculaire au plan *BD*, & l'autre *BD* ſoit dans ce même plan : or la viteſſe *BE* étant détruite par le plan, le Corps *A* n'aura plus que la viteſſe *BD* qui ſera à *BC* : : le Sinus de l'angle *BCD*, complément de *CBD*, au Sinus total.

COROL. II.

31. Si un Corps ſe meut le long de pluſieurs plans *AB*, *BC*, *CD*, &c. (Fig. 10 & 11) qu'on prolonge *AB*, & *BC* indéfiniment en *F* & en *E* ; qu'enſuite d'un rayon arbitraire *GL* on décrive l'Arc *LM*, & qu'on faſſe l'angle *LGM* = *CBF* ; qu'ayant après cela abaiſſé la perpendiculaire *MK*, on décrive du rayon *GK* l'Arc *NK*, tel que l'angle *KGN* = *DCE*, & qu'on mene la perpendiculaire *NI*, & ainſi de ſuite ; je dis que ſi on prend *GL* pour repréſenter la viteſſe ſuivant *AB*, *GI* exprimera la viteſſe ſuivant *CD*. Cela ſuit évidemment du Cor. précedent.

COROL. III.

32. Donc la ſomme des viteſſes perdues de *A* en *D* eſt égale à *LI*, c'eſt-à-dire, à la ſomme des Sinus verſes des angles *DCE*, *CBF*, &c. en prenant ſucceſſivement *GL* & *GK* pour Sinus totaux.

Corol. IV.

33. Donc en prenant GL pour Sinus total commun à tous les Sinus verſes, la viteſſe perdue ſera moindre que la ſomme de ces mêmes Sinus verſes.

Du Mouvement d'un Corps le long d'une ſurface Courbe.

Lemme.

34. *Si dans une Courbe* ABCDR (Fig. 12) *après avoir tiré les Tangentes* AY, RY, *on inſcrit un Polygone* ABCDR *dont les angles extérieurs* BAY, CBF, DCE, &c. *ſoient égaux entr'eux ; je dis qu'on peut imaginer ce Polygone d'un ſi grand nombre de côtés, que la ſomme des Sinus verſes des angles* BAY, CBF, DCE, RDS, &c. *ſoit moindre qu'une grandeur donnée.*

Car la ſomme des angles BAY, CBF, DCE, *&c.* eſt égale à l'angle RYZ fait par les Tangentes RY, AY de la Courbe. Donc ſi on fait l'angle ryz (Fig. 13) $= RYZ$, l'angle $ryn =$ à un des angles BAY ou CBF, & qu'on nomme n le nombre des angles ; on aura, $\text{arc}.\, rn \times n = \text{arc}.\, rz$, & $\frac{\text{cord}.\, rn^2}{rh} \times n =$ à la ſomme des Sinus verſes.

Mais $\frac{\text{cord}.\, rn^2}{rh} \times n < \frac{\text{arc}.\, rn^2 .\, n}{rh} = \frac{\text{arc}.\, rz^2}{n \,.\, rh}$: ſoit l'Arc $\frac{rz^2}{rh} = \pi \,.\, rl$ (π étant un nombre donné, puiſque les lignes rh, rl, & l'Arc rz ſont donnés) la ſomme des Sinus verſes ſera donc $< \frac{\pi . rl}{n}$. Or puiſque π & rl ſont des quantités conſtantes, on peut rendre n ſi grand, que $\frac{\pi \times rl}{n}$ ſoit moindre qu'une grandeur donnée ; donc à plus forte raiſon, la ſomme des Sinus verſes ſera moindre que cette même grandeur donnée.

Theorême.

35. *Si un Corps mû ſuivant une droite* XA (Fig. 12) *rencontre la ſurface Courbe* AR, *touchée en* A *par* XA, *& ſur laquelle il ſoit obligé de ſe mouvoir ; je dis qu'il ne perdra de* A *en* R *aucune partie de ſa viteſſe.*

Car on peut inſcrire dans la Courbe un Polygone *ABCDR* d'un ſi grand nombre de côtés, que la ſomme des Sinus verſes de ſes angles extérieurs, ſoit toujours (*art.* 34) moindre qu'une grandeur donnée, & qu'ainſi à plus forte raiſon (*art.* 33) la viteſſe perdue de *A* en *R* ſoit toujours auſſi petite qu'on voudra. Donc ſi ce Polygone ſe confond avec la Courbe, la viteſſe perdue de *A* en *R* ſera zero.

Corollaire.

36. Il réſulte delà, que quand un Corps ſe meut ſur une Courbe, ſa viteſſe à chaque point de la Courbe eſt préciſément altérée de la même maniére, toutes choſes d'ailleurs égales, que s'il ſe mouvoit ſur la Tangente de la Courbe en ce point.

REMARQUE.

37. On démontre d'ordinaire ce dernier Theorême, en regardant la Courbe comme un Polygone *ABCDR* d'une infinité de côtés, dont les angles extérieurs *CBF* sont infiniment aigus; les Sinus verses de ces angles étant infiniment petits du second ordre, on en conclut qu'un Corps ne perd à chaque instant qu'une partie de vitesse infiniment petite du second genre, desorte que la perte totale de *A* en *R* n'est qu'infiniment petite du premier.

La démonstration que j'ai donnée, quoique peut-être un peu longue, me paroît aussi plus lumineuse, d'autant que la vitesse perdue de *A* en *R* est réellement & exactement nulle ou zero, & non pas infiniment petite; quand on veut démontrer en toute rigueur les propriétés des Courbes, on tombe nécessairement dans des démonstrations un peu longues; la méthode des infiniment petits abrege beaucoup ces démonstrations, mais elle n'est pas si rigoureuse. Elle a de plus un autre inconvénient, c'est que les commençans qui n'en pénétrent pas toujours l'esprit, pourroient s'accoutumer à regarder ces infiniment petits comme des réalités; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle-même a donné occasion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Geométrie. La méthode des infiniment petits, n'est autre chose que la méthode des raisons premiéres & derniéres, c'est-à-dire des rapports des quantités qui naissent ou qui s'évanouissent. * Quand on a bien conçu l'esprit & les Principes de cette Méthode, alors il est utile de la mettre en usage pour parvenir à des solutions plus élégantes.

De l'Equilibre.

38. Si les obstacles que le Corps rencontre dans son Mouvement, n'ont précisément que la résistance nécessaire pour empêcher le Corps de se mouvoir ; on dit alors qu'il y a équilibre entre le Corps & ces obstacles.

THEORÊME.

39. *Si deux Corps dont les vitesses sont en raison inverse de leurs masses, ont des directions opposées, de telle maniére que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux Corps.*

Premier cas.

1°. Si les deux Corps sont égaux & leurs vitesses égales, il est évident qu'ils resteront tous deux en repos. Car il n'y a point de raison pourquoi l'un se meuve plutôt que l'autre dans la direction qu'il a ; d'ailleurs il est clair par

* Voyez la Section I. du 1. liv. des Principes de M. *Newton*, & surtout l'Ouvrage nouveau de M. *Mac-Laurin*, qui a pour titre : *A Treatise of fluxions.* L'occasion de ce Traité de M. *Mac-Laurin*, a été un Livre Anglois intitulé, *The Analyst.* &c. contre la certitude des Mathematiques, & dont la plûpart des argumens sont contre la Méthode des infiniment petits.

l'article 29, qu'ils ne peuvent se mouvoir dans une direction contraire. Donc &c.

Second cas.

Si l'un de ces Corps restant dans le même état, on augmente du double la masse de l'autre, & qu'on diminue sa vitesse de la moitié, il y aura encore équilibre. Car on peut regarder (*art.* 23.) la vitesse du petit Corps comme composée de deux vitesses, égales chacune à la vitesse du grand ; & la masse du grand, comme composée de deux masses égales, animée chacune de la même vitesse. Donc à la place de chacune des masses proposées, on peut imaginer de chaque côté deux masses égales animées de vitesses égales. Or dans cette derniére hypothese il y auroit équilibre (*Cas* 1.). Donc &c.

Troisiéme cas.

Si les deux masses sont entr'elles comme deux nombres rationnels quelconques, soient M, m, ces deux masses, V, u, leurs vitesses, μ la masse qui est la mesure commune des deux masses M, m, v la vitesse qui est la mesure commune des deux vitesses, V, u, on aura $m = \mu p$, $M = \mu P$; $u = vP$, $V = vp$, P, & p exprimant deux nombres entiers. Cela posé, on prouvera, comme on a fait dans le Cas précedent, qu'à chacune des masses animée de sa vitesse, on peut substituer un nombre $P \times p$ de masses μ animées de la vitesse v, & qui par conséquent feront équilibre de part & d'autre. Donc &c.

Quatriéme cas.

Suppoſons enfin que les maſſes M, m, ſoient incommenſurables, de maniére que $m = \mu p$ & $M = \mu P + z$, P & p étant deux nombres entiers, & $z < \mu$; je dis que ſi $m \times u = M \times V$. Il y aura encore équilibre.

Car ſuppoſons qu'il n'y eut point équilibre, & qu'il fallut pour cela ajoûter ou retrancher de la maſſe M une quantité t; la maſſe $\mu P + z \pm t$ animée de la viteſſe V, ſeroit donc en équilibre avec la maſſe m ou μp animée viteſſe u. Or la quantité t doit être néceſſairement plus petite que μ. Car ſi elle étoit plus grande, on auroit $\mu P + z + t > \mu P + \mu$. De plus, cette derniére maſſe $\mu P + \mu$, devroit pour faire équilibre à la maſſe m, être animée de la viteſſe $\frac{mu}{\mu P + \mu} < \frac{mu}{\mu P + z}$, c'eſt-à-dire $< V$. Mais on ſuppoſe que la maſſe $\mu P + z + t$ animée de la viteſſe V, faſſe équilibre à la maſſe m animée de la viteſſe u. Donc il eſt impoſſible que la maſſe $\mu P + \mu$ animée d'une viteſſe plus petite que V faſſe auſſi équilibre à m. Donc t doit néceſſairement être $< \mu$, & comme μ peut être auſſi petit qu'on voudra, il s'enſuit que $t = o$. Donc &c.

Si la quantité t étoit une quantité qu'il fallut retrancher, on auroit en ſuppoſant $t > \mu$; $\mu P + z - t < \mu P$ & $V < \frac{mu}{\mu P}$. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

Le produit de la maſſe d'un Corps par ſa viteſſe eſt appellé *quantité de Mouvement*. Delà naît cet axiôme, que les Corps qui ont des quantités de Mouvement égales & directement opposées, se font équilibre.

COROL. I.

40. Si trois Corps A, B, C, (Fig. 14) sont attachés à une verge indéfinie MN, ou à un fil, & qu'ils reçoivent suivant AM, BM, CN des vitesses telles que la somme des quantités de Mouvement du Corps A & du Corps B, soit égale à celle du Corps C seul, il y aura équilibre. Car on peut (*art.* 23) regarder la vitesse du Corps C comme composée de deux vitesses quelconques, dont la somme soit égale à la vitesse totale; & par conséquent on peut considérer dans le Corps C deux quantités de Mouvement, dont l'une soit égale & contraire à celle de B, l'autre égale & contraire à celle de A. Donc &c.

Donc en général, quel que soit le nombre des Corps *il y aura équilibre, quand la somme des quantités de Mouvemens de ceux qui tirent en un sens, sera égale à la somme des quantités de Mouvement de ceux qui tirent en sens contraire.*

COROL. II.

41. Supposons que trois Corps B, C, F, (Fig. 15) attachés aux fils ou verges AB, AC, AF, soient en équilibre, & qu'on cherche le rapport des quantités de Mouvement de ces trois Corps entr'elles. On remarquera d'abord que l'action des Corps B, & C sur le point A est la même, que si ces Corps B & C étoient en A; on supposera que AH & AP soient entr'elles comme les vitesses

ses des Corps B & C ; on décomposera chacune de ces vitesses AH, AP en deux autres AG, AN; & AL, AQ; dont les deux AG, AQ aient des directions contraires; & les deux autres AN, AL soient dirigées suivant AF prolongée.

Maintenant, puisqu'il y a équilibre, il s'ensuit que $B \times AG = C \times AQ$; de plus, la quantité de Mouvement du Corps F doit être égale à $B \times AN + C \times AL$. Or si par un point quelconque E de la ligne AF prolongée, on tire EK paralléle à AC, & ED paralléle à AB; je dis que les lignes AE, AD, AK seront entr'elles comme les quantités de Mouvement des Corps F, C, B; c'est-à-dire que $AE . \binom{AK}{AD} :: C \times AL + B \times AN . \binom{B \times AH}{C \times AP}$.

Car $AE . \binom{AK}{AD} :: AO + AM . \binom{AK}{AD} :: \frac{AL \times OD}{PL} + \frac{AN \times KM}{AG} . \left\{\begin{matrix}\frac{AH \times KM}{AG} \\ \frac{AP \times OD}{PL}\end{matrix}\right\}$ (à cause de $OD = KM$) $:: \frac{AL}{PL} + \frac{AN}{AG} . \left\{\begin{matrix}\frac{AH}{AG} \\ \frac{AP}{PL}\end{matrix}\right\}$ (mettant pour AG & PL leurs proportionnelles C & B) $:: AL \times C + AN \times B . \binom{AH \times B}{AP \times C}$. Ce Q. F. D.

Corol. III.

42. Tout ce que nous venons de dire sur l'équilibre dans les propositions précedentes, sera vrai encore, si au lieu

des vitesses finies imprimées aux Corps qui sont en équilibre, on leur suppose des forces accélératrices qui soient entr'elles comme étoient ces vitesses finies, ou, suivant les définitions données *art.* 19, des forces motrices qui soient entr'elles comme étoient leurs quantités de Mouvement. L'équilibre subsistera encore, il ne faudra que se servir pour la démonstration, du Coroll. 2. Chap. 2. au lieu du Coroll. 1. du même Chapitre.

REMARQUE

Sur l'usage du mot de Puissances *dans la Statique.*

43. Les puissances ou causes qui meuvent les Corps, ne peuvent agir les unes sur les autres que par l'entremise des Corps même qu'elles tendent à mouvoir. D'où il s'ensuit que l'action mutuelle de ces puissances, n'est autre chose que l'action même des Corps animés par les vitesses qu'elles leurs donnent. On ne doit donc entendre par l'action des puissances, & par le terme même de *puissances* dont on se sert communément dans la Statique, que le produit d'un Corps par sa vitesse ou par sa force accélératrice. De cette définition, & des articles précedens, on conclut aisément que deux puissances égales & directement opposées se font équilibre, que deux puissances qui agissent en même sens produisent un effet égal à la somme de chacune; que si trois puissances agissant sur un point commun sont en équilibre, & qu'on fasse sur les directions de deux de ces puissances un pa-

rallélogramme, la Diagonale de ce parallélogramme sera dans la direction prolongée de la troisiéme puissance, & que les rapports des trois puissances seront ceux de la Diagonale aux côtés &c, & plusieurs autres Theorêmes semblables que l'on démontre dans la Statique, peut-être avec moins de précision que nous le faisons ici, parce qu'on n'y donne pas communément une notion du mot de *puissance* aussi nette, que celle que nous venons d'en donner.

COROL. IV.

44. Supposons que deux puissances égales appliquées aux extrêmités *A*, *B* (Fig. 16) d'une verge droite & inflexible *AB*, agissent en sens contraire dans la direction de cette même verge, & se fassent par conséquent équilibre. Si on imagine une autre verge quelconque *ABC*, fixe même, si l'on veut, en un point quelconque *C*, il est évident que l'équilibre subsistera. De plus, si les puissances au lieu de demeurer appliquées en *A* & en *B*, étoient appliquées par tout où l'on voudroit dans *AB* prolongée vers *A* & vers *B*, il est clair que l'équilibre subsisteroit encore. Donc si on suppose la verge *AB* anéantie, & que la seule verge *ACB* subsiste, les puissances appliquées en *A* & en *B* étant égales & de directions contraires, se feront équilibre.

COROL. V.

Qui contient le principe du Levier.

45. Soient AH & BE les directions de deux puissances en équilibre sur le Levier ACB, & que AH & BE soient entr'elles comme ces puissances; je décompose la puissance AH en deux autres, dont les directions AK & AG prolongées, passent, l'une par B, l'autre par C, & de même la puissance BE en deux autres, dont les directions BP & BF passent par A & par C. En menant les perpendiculaires CM, CV, CL, sur AH, BE, AB, j'ai $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$ & $BP = \frac{BE \times CV}{CL}$. mais à cause de l'équilibre $AK = PB$. Donc $CM \times AH = BE \times CV$. donc les puissances AH, BE sont entr'elles en raison inverse des distances de leurs directions au point fixe.

COROL. VI.

46. Si le point C n'étoit pas fixe, alors il faudroit se servir du Coroll. II. ci-dessus, pour savoir quelle puissance il faudroit appliquer en C pour résister aux puissances AG, BF. Or comme les puissances AG, BF peuvent être regardées comme composées des puissances AH & Ak, BE & Bp, & que les puissances Ak, Bp sont égales & se détruisent, il s'ensuit que la puissance capable de faire équilibre aux puissances AG, BF, sera la même que celle qu'on trouveroit, si au lieu de ces puis-

ſances AG, BF, on imaginoit les puiſſances AH, BE, appliquées en C avec leurs directions propres.

Remarque ſur le cas où le Levier eſt droit.

47. La démonſtration précedente du principe du Levier, ſuppoſe que les lignes AC & CB faſſent un angle, & il ſemble par conſéquent qu'elle ne puiſſe s'appliquer au cas où le Levier eſt droit, & les directions des puiſſances paralléles. Cependant comme la propoſition eſt vraye, quelque obtus que ſoit l'angle ACB; il eſt clair qu'elle doit être vraye encore, lorſque l'angle ACB eſt de 180 degrés. Voici, au reſte, une démonſtration plus rigoureuſe du cas dont il s'agit.

Soient AP, AR (Fig. 17) les bras de Levier; PD, RS les directions des deux puiſſances, que je ſuppoſe en équilibre; il eſt évident en premier lieu, que ſi les bras de Levier ſont égaux, les puiſſances P, R doivent être égales. Mais ſi les bras AP, AR ſont inégaux, alors ayant tiré à volonté la ligne AS, imaginons que cette ligne repréſente une verge inflexible, à l'extrêmité S de laquelle ſoient appliquées deux puiſſances égales & oppoſées, dans la même ligne que la puiſſance R: ſuppoſons, de plus, que la ſeule puiſſance S qui tire en embas, ſoit capable de faire équilibre avec la puiſſance P ſur le Levier PAS. Il eſt conſtant que la puiſſance S oppoſée à celle-ci, doit faire équilibre à la puiſſance R; c'eſt-à-dire (*art.* 44) qu'elle doit lui être égale. Donc $R = S =$

(*art.* 45) $\frac{P \times AP}{AR}$. Ce *Q. F. D.* Donc $R . P :: AP . AR$.

Je ne ſuis pas le ſeul qui ait déduit les propriétés du Levier droit de celles du Levier courbe. M. *Newton* en a uſé de la même maniére dans ſes Principes, quoiqu'il ait ſuivi une route différente de la nôtre, & il y a lieu de croire que ce grand Geométre ſentoit la difficulté qu'il y auroit eu à s'y prendre autrement. J'ai tiré les propriétés du Levier courbe, de l'équilibre entre deux puiſſances égales & oppoſées en ligne droite; mais comme ces deux puiſſances s'évanouiſſent dans le cas du Levier droit, la démonſtration pour ce cas n'a pu être tirée qu'indirectement du cas général.

On peut démontrer les propriétés du Levier droit, dont les puiſſances ſont paralléles, en imaginant toutes ces puiſſançes réduites à une ſeule, dont la direction paſſe par le point d'appui: c'eſt ainſi que M. *Varignon* en a uſé dans ſa Mécanique. Cette Méthode entre pluſieurs avantages, a celui de l'élégance & de l'uniformité; mais n'a-t'elle point auſſi, comme les autres, le défaut d'être indirecte, & de n'être pas tirée des vrais Principes de l'équilibre? Il faut imaginer que les directions des puiſſances prolongées concourent à l'infini, les réduire enſuite à une ſeule par la décompoſition, & démontrer que la direction de cette derniére paſſe par le point d'appui. Doit-on s'y prendre de cette maniére pour prouver l'équilibre de deux puiſſances égales, appliquées ſuivant des directions paralléles à des bras égaux de Levier? il me ſemble que cet équilibre est aussi simple & aussi facile à concevoir, que celui de deux puissances opposées en ligne droite, ou d'une puissance retenue par un point fixe, & que nous n'avons aucun moyen direct de réduire l'un à l'autre : or si la Méthode de M. *Varignon* pour démontrer l'équilibre du Levier est indirecte dans un cas, elle doit l'être aussi nécessairement dans l'application au cas général.

COROL. VII.

48. Toutes choses demeurant les mêmes que dans la Remarque précédente ; si on suppose au lieu du point fixe *A* une puissance qui fasse équilibre aux puissances *P* & *R*, il est évident que sa direction sera paralléle & contraire à celle de ces puissances, & qu'elle sera égale à leur somme. Car en supposant qu'elle fasse équilibre aux puissances *P*, *S*, elle sera $= P + S$. Donc puisque $S = R$, elle sera aussi $= P + R$.

49. Je ne m'étendrai pas davantage sur les Loix de l'équilibre dans cette premiére partie. J'aurai occasion d'en parler encore dans la seconde partie de cet Ouvrage. La Loi générale de l'équilibre, est que les puissances soient entr'elles réciproquement comme les vitesses, estimées suivant la direction de ces puissances. C'est de cette Loi générale, dont M. *Newton* fait mention en peu de mots au commencement de ses Principes, que dépend la démonstration de la conservation des forces vives, comme on le verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

Pour ce qui concerne le détail des différentes Machines dont on fait mention d'ordinaire dans la Statique, comme la Poulie, le Treuil &c, je me contente, n'ayant là-dessus rien de nouveau à dire, de renvoyer mes Lecteurs aux Livres qui en traitent, & particuliérement à l'Ouvrage de M. *Trabaud* qui a paru l'année derniére, & qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre*; Ouvrage où cette matiére & plusieurs autres sont traitées avec exactitude & avec clarté.

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniére quelconque, avec plusieurs applications de ce Principe.

CHAPITRE PREMIER.

Exposition du Principe.

Les Corps n'agissent les uns sur les autres que de trois maniéres différentes qui nous soient connues : ou par impulsion immédiate, comme dans le choc ordinaire, ou par le moyen de quelque Corps interposé entr'eux, & auquel ils sont attachés, ou enfin par une vertu d'attraction réciproque, comme font dans le systême Newtonien le Soleil & les Planetes. Les effets de cette derniére espece d'action ayant été suffisamment examinés, je me bornerai à traiter ici du Mouvement des Corps qui se choquent d'une maniére quelconque, ou de ceux qui se tirent par des fils ou des verges inflexibles. Je m'arrêterai d'autant plus volontiers sur ce sujet, que les plus grands Géométres ne nous ont donné jusqu'à présent qu'un très-petit nombre de Problêmes de ce genre, &

que j'espere, par la Méthode générale que je vais donner, mettre tous ceux qui sont au fait du calcul & des Principes de la Mécanique, en état de résoudre les plus difficiles Problêmes de cette espece.

DE'FINITION.

J'appellerai dans la suite *Mouvement* d'un Corps, la vitesse de ce même Corps considerée en ayant égard à sa direction, & par *quantité de Mouvement*, j'entendrai à l'ordinaire le produit de la masse par la vitesse.

PROBLÊME GENERAL.

50. *Soit donné un systême de Corps disposés les uns par rapport aux autres d'une maniére quelconque; & supposons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres Corps, trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre.*

Solution.

Soient A, B, C, &c. les Corps qui composent le systême, & supposons qu'on leur ait imprimé les Mouvemens a, b, c, &c. qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les Mouvemens a, b, c, &c. Il est clair qu'on peut regarder le Mouvement a imprimé au Corps A comme composé du Mouvement a qu'il a pris, & d'un autre Mouvement α; qu'on peut de même regarder les Mouvemens b, c, &c. comme composés des Mouvemens b, β; c, x; &c. d'où il s'ensuit que le Mouvement des Corps *A*, *B*, *C*, &c. entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions *a*, *b*, *c*, on leur eût donné à la fois les doubles impulsions a, α; b, β; c, x, *&c.* Or par la supposition, les Corps *A*, *B*, *C*, &c. ont pris d'eux-mêmes les Mouvemens a, b, c; *&c.* Donc les Mouvemens α, β, x &c. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les Mouvemens a, b, c *&c.* c'est-à-dire, que si les Corps n'avoient reçu que les Mouvemens α, β, x &c. ces Mouvemens auroient dû se détruire mutuellement, & le systême demeurer en repos.

Delà résulte le Principe suivant, pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres. *Décomposés les Mouvemens a, b, c &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres* a, α; b, β; c, x; &c. *qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvemens* a, b, c &c. *ils eussent pû conserver ces Mouvemens sans se nuire réciproquement; & que si on ne leur eût imprimé que les Mouvemens* α, β, x, &c. *le systême fut demeuré en repos*; il est clair que a, b, c seront les Mouvemens que ces Corps prendront en vertu de leur action. Ce *Q. F. Trouver.*

CHAPITRE II.

Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps, déduites du Principe précédent.

DÉFINITION I.

J'APPELLERAI dans la suite *centre de gravité* de deux Corps, un point pris dans la ligne droite qui joint ces Corps, & dont les distances à chacun de ces Corps, soient en raison inverse de leurs masses ; & en général, j'entendrai toujours par le mot de *centre de gravité de plusieurs Corps*, ce qu'on entend d'ordinaire par ce mot en Mécanique, c'est-à-dire, un point tel, que si on fait passer par ce point un plan de position quelconque, la somme des produits des masses qui se trouveront d'un côté de ce plan, multipliées chacune par sa distance à ce même plan, soit égale à la somme des produits des masses qui se trouveront de l'autre côté, multipliées de même chacune par sa distance au plan.

SCOLIE.

51. Lorsque les pesanteurs des Corps sont comme leurs masses, le centre de gravité, tel que nous venons de le définir, est aussi le point par lequel le système devroit être suspendu pour rester en équilibre, si tous les Corps étoient unis l'un à l'autre par des Leviers inflexibles. Il

n'en est pas de même, lorsque les forces motrices ou pesanteurs des Corps ne sont pas comme leurs masses. Ce que nous appellons ici *centre de gravité*, devroit plutôt s'appeller alors *centre de masses*. * Nous nous servirons cependant du terme de *centre de gravité*, pour nous conformer à l'usage reçû.

DÉFINITION II.

Lorsque plusieurs puissances agissent ensemble, j'appellerai *force résultante du concours d'action de ces puissances*, ou simplement *force résultante de ces puissances*, une puissance égale & directement opposée, à celle qui seroit capable de leur faire équilibre.

Ainsi, par exemple, si *AM* (Fig. 17) est la direction de la puissance qui fait équilibre aux puissances *P*, *R* sur le Levier *PAR*, *AN* sera la direction de la force résultante des puissances *P*, *R*, & cette force résultante sera égale à la force suivant *AM*.

COROLLAIRE.

52. Si plusieurs puissances se font équilibre d'une maniére quelconque, la force résultante sera nulle, s'il n'y a pas de point fixe; & s'il y en a un, la direction de la force résultante passera par le point fixe.

Car *dans le premier Cas*, puisque toutes les puissances

* Ce terme de *centre de masse* a été imaginé par M. *Daniel Bernoulli*; Traité du flux & reflux, Chap. 1.

se font équilibre par elles-mêmes les unes aux autres, la puissance capable de faire seule équilibre à toutes ces puissances est donc zero, & par conséquent aussi (*déf. préced.*) la force résultante.

Dans le second Cas, il est visible que le point fixe fait l'effet d'une puissance qui soutient l'effort de toutes les autres; donc si on détruit le point fixe, & qu'on cherche une puissance capable de faire équilibre à toutes les puissances données, la direction de cette puissance passera nécessairement par le point fixe. Donc la direction de la force résultante y passera aussi.

J'entends au reste ici, & j'entendrai dans les Lemmes suivans par le mot de point fixe, *non-seulement un point Mathematique (comme l'appui d'un Levier, le point de suspension d'une verge ou d'un fil); mais en général tout obstacle insurmontable, qui par sa résistance soit capable de détruire l'effet commun des puissances, & de produire l'équilibre entr'elles.*

LEMME I.

53. *Si tant de Corps qu'on voudra se meuvent uniformément suivant des directions paralléles, dans le même plan ou dans des plans différens, la direction de leur centre de gravité commun sera paralléle aux directions de ces Corps, & sa vitesse sera égale à la somme des quantités de Mouvement de chaque Corps, divisée par la somme des masses.* Cette proposition est démontrée dans plusieurs Ouvrages.

LEMME II.

54. *Soient un même plan trois Corps* A, a, α, (Fig. 18) *ou en général tant de Corps qu'on voudra, & G leur centre de gravité. Soit* GM *la ligne droite parcourue par le centre de gravité de ces Corps, dans le tems qu'ils parcourent uniformément les lignes quelconques* AC, ac, αx. *Je dis, que si on décompose les vitesses* AC, ac, αx, *chacune en deux autres* AB, AD; ab, ad; αϐ, αδ, *telles que les lignes* AB, ab, αϐ *soient paralléles entr'elles aussi-bien que les lignes* BC, bc, ϐx; *& qu'on cherche la ligne* GN *que parcourroit le centre de gravité* G, *si les Corps* A, a, α, *avoient les vitesses & les directions* AB, ab, αϐ, *& de même la ligne* GO *que parcourroit ce même centre, si les Corps* A, a, α, *avoient les vitesses & les directions* AD, ad, αδ: *la Diagonale du parallélogramme fait sur les lignes* GN, GO, *sera la ligne même* GM *que parcourt le centre, lorsque les Corps* A, a, α, *ont les vitesses & les directions* AC, ac, αx.

Car supposons, que lorsque les Corps *A*, *a*, *α*, sont parvenus en *B*, *b*, *ϐ*, & que par conséquent (*hyp.*) le centre *G* est en *N*, on leur donne suivant *BC*, *bc*, *ϐx*, des vitesses égales & paralléles aux vitesses suivant *AD*, *ad*, *αδ*, il est clair qu'ils arriveront aux points *C*, *c*, *x* des lignes *AC*, *ac*, *αx*. Or, par la supposition, lorsque les Corps *A*, *a*, *α* sont en *C*, *c*, *x*, le centre *G* est en *M*; donc tandis que les Corps *A*, *a*, *α*, parcourent les lignes *BC*, *bc*, *ϐx*, le centre de gravité parcourra la ligne

NM. Cette ligne *NM* sera (*Lem.* 1) parallele aux lignes BC, bc, βx, & $= \frac{A \cdot BC + a \cdot bc + \alpha \cdot \beta x}{A + a + \alpha}$. Mais la ligne GO que parcourroit le centre de gravité G, tandis que les Corps A, a, α, décriroient les lignes AD, ad, $\alpha\delta$, paralléles & égales à BC, bc, βx, cette ligne GO seroit paralléle à ces mêmes lignes AD, ad, $\alpha\delta$, & seroit $= \frac{A \cdot AD + a \cdot ad + \alpha \cdot \alpha\delta}{A + a + \alpha} = \frac{A \cdot BC + a \cdot bc + \alpha \cdot \beta x}{A + a + \alpha} = NM$. Donc la ligne GO est égale & paralléle à NM: donc MG est la Diagonale du parallélogramme fait sur les côtés NG, GO. Ce *Q. F. D.*

SCOLIE.

55. Il est visible que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de Corps qu'on voudra, & qu'ainsi la proposition est générale.

LEMME III.

56. *Si* GM (Fig. 18 & 19) *est la ligne parcourue par le centre de gravité* G *des Corps* A, a, α, *tandis que ces Corps décrivent uniformément les lignes quelconques* AC, ac, αx, *& qu'ayant transporté ces Corps en d'autres endroits* F, f, φ *du même plan, de maniere qu'ils soient disposés l'un par rapport à l'autre comme on voudra, & que* γ *soit leur centre de gravité, on suppose qu'ils décrivent les lignes* FH, fh, φη, *égales & paralléles à* AC, ac, αx, *chacune à sa*

sa correspondante, je dis que la ligne $\gamma\mu$ décrite par le centre de gravité, sera égale & parallele à GM.

Car, soient FL, fl, $\varphi\lambda$ égales & paralléles à AB, ab, $\alpha\beta$; FP, fp, $\varphi\pi$, égales & paralléles à AD, ad, $\alpha\delta$, chacune à sa correspondante, & $\gamma\nu$ le chemin du centre γ, lorsque les Corps décrivent les lignes FL, fl, $\varphi\lambda$; $\gamma\omega$ le chemin du même centre, lorsqu'ils décrivent FP, fp, $\varphi\pi$. Il est clair que $\gamma\nu$ sera égale & paralléle à GN, & $\gamma\omega$ égale & paralléle à GO. Donc $\gamma\mu$ sera aussi égale & paralléle à GM: mais (*Lem. préced.*) ces deux lignes sont celles que décrivent les centres de gravité G, γ, quand les Corps A, a, α & F, f, φ, parcourent les lignes AC, ac, αx, & FH, fh, $\varphi\eta$. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

LEMME IV.

57. *Les mêmes choses étant supposées que dans le* Lem. II. *ci-dessus, avec cette différence que* AB, ab, $\alpha\beta$, *&* AD, ad, $\alpha\delta$, (Fig. 20) *ne soient point paralléles: si* GM *est le chemin du centre de gravité, lorsque les Corps* A, a, α, *décrivent uniformément les lignes* AC, ac, αx; GN *le chemin de ce même centre, lorsque ces Corps décrivent les lignes* AB, ab, $\alpha\beta$; *&* GO *le chemin du centre, lorsque les Corps* A, a, α, *décrivent les lignes* AD, ad, $\alpha\delta$; *je dis que* GM *sera la Diagonale du parallélogramme fait sur les côtés* GM, GO.

Car l'on prouvera comme dans le *Lem. II.* que NM est le chemin du centre, lorsque les Corps A, a, α, décrivent les lignes BC, bc, βx. Mais à cause que AD, *ad*, *aδ* sont égales & paralléles à *BC*, *bc*, *6x*, chacune à chacune; il s'ensuit (*Lem.* 3) que *GO* est égale & paralléle à *NM*. Donc &c.

COROL. I.

58. Si on avoit décomposé les Mouvemens *AC*, *ac*, *αx* chacun en trois autres quelconques, ou en général en tant d'autres qu'on eût voulu, le chemin *GM* du centre de gravité auroit toujours été la derniére Diagonale des parallélogrammes, qui auroient eu pour côtés les lignes particuliéres que le centre de gravité auroit parcouru, si les Corps *A*, *a*, *α*, avoient eu séparément & successivement chacun des Mouvemens composans. Cela est clair par le Lem. précedent.

COROL. II.

59. La même proposition seroit encore vraye, si les Mouvemens composans n'étoient pas en nombre égal dans tous les Corps; par exemple, si le Mouvement de l'un étoit décomposé en trois, le Mouvement d'un autre en deux, &c. Car le Lemme précedent n'en seroit pas moins véritable, quand on supposeroit par exemple *AD* = o, c'est-à-dire, que le Mouvement *AC* n'eût point été décomposé.

LEMME V.

60. *Si tant de Corps* A, B, C &c. *qu'on voudra sont liés ou joints ensemble d'une maniére quelconque, sans néan-*

moins qu'il y ait dans le syſtême aucun point fixe ; & qu'on leur imprime les Mouvemens M, N, P, &c. *tels qu'en vertu de ces Mouvemens ils ſoient en équilibre. Je dis que ſi les Corps,* A, B, C, *pouvoient ſuivre librement les Mouvemens* M, N, P, &c. *le centre de gravité demeureroit en repos.*

Car ſi on décompoſe les Mouvemens M, N, P, &c. chacun en deux autres m, μ; n, ν; p, π; &c. paralléles à deux lignes données de poſition quelconque, que j'appelle K & Q; il faudra pour trouver le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvemens M, N, P, &c. chercher le chemin de ce même centre en vertu des Mouvemens m, n, p, qui ſera (*Lem.* 1) paralléle à K, & $= \frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C + \&c.}$; & le chemin de ce même centre en vertu des Mouvemens, μ, ν, π &c. qui ſera paralléle à Q, & $= \frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.}{A + B + C + \&c.}$. La Diagonale du parallélogramme fait ſur ces deux lignes, ſera (*Lem.* 2) le chemin du centre de gravité. Il faut donc prouver que chacune de ces deux lignes ſera zero, pour faire voir que le chemin du centre de gravité eſt $= 0$, ou, ce qui eſt la même choſe, il faut démontrer que $A.m + B.n + C.p + \&c. = 0$, & $A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c. = 0$.

Or, puiſque (*hyp.*) les Corps A, B, C, &c. animés des Mouvemens M, N, P, &c. ſont en équilibre, & qu'il n'y a dans le ſyſtême aucun point fixe, la force réſultante des puiſſances $A.M$, $B.N$, $C.P$ &c. doit être $= 0$.

mais comme les puissances $A.M$, $B.N$, $C.P$ &c. se décomposent dans les puissances $A.m$, $A.\mu$; $B.n$, $B.\nu$; $C.p$, $C.\pi$; &c. la force résultante de ces puissances, est celle qui provient de la force résultante des puissances $A.m$; $B.n$; $C.p$; &c. & de la force résultante des puissances $A.\mu$; $B.\nu$; $C.\pi$ &c. mais ces deux derniéres forces résultantes sont paralléles à deux lignes différentes K & Q. Donc pour que la force qui en provient soit zero, chacune en particulier doit être $= 0$. Or la premiére est $A.m + B.n + C.p +$ &c. la seconde $A.\mu + B.\nu + C.\pi +$ &c. donc chacune de ces deux quantités est $= 0$. Ce *Q. F. D.*

LEMME VI.

61. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Coroll. précedent, si ce n'est que les Mouvemens* M, N, P, &c. *soient quelconques, c'est-à-dire tels que les Corps* A, B, C &c. *animés de ces Mouvemens, se fassent équilibre ou non, & qu'il y ait de plus, si l'on veut, un point fixe dans le systême: je dis que si l'on supposoit que les Corps* A, B, C, &c. *suivissent les Mouvemens* M, N, P &c, *abstraction faite de leur action mutuelle, le chemin du centre de gravité seroit paralléle à la direction de la force résultante des puissances* A.M; B.N; C.P; &c.

Car pour avoir la direction de cette force, il faut (les mêmes choses étant posées que dans la démonstration du Lem. précedent) tirer la Diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, paralléles à K & à Q, soient entr'eux comme $A.m + B.n + C.p + \&c.$ à $A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.$ Mais pour avoir le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvemens $M, N, P, \&c.$ il faut (*Lem.* 2) tirer la Diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, paralléles à K & à Q, soient entr'eux comme $\frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ à $\frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ donc les côtés de ces deux parallélogrammes seront paralléles chacun à son correspondant, & seront l'un à l'autre dans le même rapport. Donc les Diagonales seront paralléles. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

Corollaire.

62. Si les Corps A, B, C, &c. avoient les Mouvemens $-M$, $-N$, $-P$, &c. le chemin du centre de gravité seroit paralléle à la direction de la force résultante, mais en sens contraire.

Scolie.

63. Tous les Lemmes démontrés ci-dessus sont encore vrais, lorsque les Corps sont supposés dans des plans differens. Car 1°. le Lem. 1. est vrai dans ce cas comme dans les autres, 2°. La démonstration du Lem. 2. ne suppose pas à la rigueur que les Corps A, a, α, soient dans le même plan ; elle suppose seulement que les Mouvemens AC, ac, αx puissent se décomposer chacun en deux autres paralléles à deux lignes données. D'où

il s'ensuit que le Lem. 3. sera vrai, lors même que les Corps sont dans des plans différens, au moins dans la supposition que les Mouvemens imprimés à chaque Corps puissent se décomposer chacun en deux autres paralléles à deux lignes données de position. Or lorsque les Corps sont dans des plans différens, on peut décomposer les Mouvemens imprimés, chacun en deux autres, dont l'un soit paralléle à une ligne donnée de position, & le second puisse derechef se décomposer en deux autres aussi paralléles chacun à deux autres lignes données de position. D'où il s'ensuit que le Lem. 3. est vrai dans tous les cas, & qu'ainsi les Lemmes 4, 5 & 6 qui ne sont appuyés que sur les trois premiers, & qui ne demandent point que les Corps soient dans un même plan, sont aussi vrais dans tous les cas.

Au reste, nous avons supposé dans les Lemmes précedens, la proposition démontrée par M. *Newton*, que le centre de gravité de plusieurs Corps qui se meuvent uniformément & en ligne droite, sans agir les uns sur les autres, se meut aussi uniformément & en ligne droite. Cependant il est facile de voir que par la Méthode de la décomposition des Mouvemens en d'autres paralléles à des lignes données, on pourroit aussi démontrer très-facilement cette proposition, & qu'ainsi notre Méthode a cet avantage, qu'on peut s'en servir pour démontrer que le centre de gravité de plusieurs Corps, se meut uniformément & en ligne droite, soit que ces Corps agissent, soit qu'ils n'agissent pas les uns sur les autres.

THEOREME I.

64. *L'état de Mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs Corps, ne change point par l'action mutuelle de ces Corps entr'eux, pourvû que le système soit entiérement libre, c'est-à-dire qu'il ne soit assujéti à se mouvoir autour d'aucun point fixe.*

Car (*art.* 50) les Mouvemens *a*, *b*, *c* &c. étant composés des Mouvemens a, *α*; b, *ϐ*; c, *x*; &c. les Mouvemens a, b, c, peuvent être regardés comme composés des Mouvemens *a*, — *α*; *b*, — *ϐ*; *c*, — *x*; d'où il s'ensuit que le chemin du centre de gravité quand les Corps sont animés des Mouvemens a, b, c, &c. est le même (*Lem.* 4) que si on les supposoit animés d'abord des Mouvemens *a*, *b*, *c*, & ensuite des Mouvemens — *α*, — *ϐ*, — *x*. Or puisque par l'hypothese, il n'y a dans le systême aucun point fixe, & que le systême demeureroit en repos, si les Corps n'avoient reçû que les Mouvemens *α*, *ϐ*, *x*; &c. Il s'ensuit (*Lem.* 5. & *Corol. Lem.* 6) qu'en vertu des Mouvemens — *α*, — *ϐ*, — *x*, &c. le chemin du centre de gravité est zero. Donc le chemin du centre de gravité est le même quand les Corps ont les Mouvemens a, b, c, que s'ils suivoient les Mouvemens *a*, *b*, *c*, qu'on leur a imprimés.

REMARQUE.

65. S'il y a dans le systême quelque point fixe, alors les Corps animés des Mouvemens *α*, *ϐ*, *x*, &c. peuvent se faire équilibre, sans que la force résultante de ces Mou-

vemens soit zero: il suffit que la direction de la force résultante de ces Mouvemens passe par le point fixe; dans ce cas, le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvemens $-\alpha$, $-\beta$, $-x$ sera (*Cor. Lem.* 6) paralléle à la direction de cette force & en sens contraire, & par conséquent ne sera point $= 0$. Donc alors l'action mutuelle des Corps changera l'état du centre de gravité.

THEORÊME II.

66. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Theor. I. si la pesanteur ou une force accélératrice, constante pour chaque Corps, & différente, si l'on veut, pour chacun d'eux, agit sur ces Corps suivant des lignes paralléles, le centre de gravité ou plutôt le centre de masse commun décrira la même Courbe qu'il auroit décrite, si ces Corps eussent été libres.*

Pour le démontrer, ne prenons que deux Corps *A*, *B*, (Fig. 21) & supposons que $A\alpha$, $B\beta$, soient les petites lignes qu'ils parcourroient naturellement en vertu des vitesses primitivement imprimées Aa, Bb, & de la force accélératrice suivant $a\alpha$, $b\beta$; soit *C* le centre de masse des Corps *A* & *B*, c'est-à-dire un point dont les distances aux points *A* & *B* soient en raison inverse des masses *A* & *B*, (& non pas des poids *A* & *B* qui peuvent ici n'être pas comme les masses,) & que les Corps *A* & *B*, au lieu de parcourir les lignes $A\alpha$, $B\beta$, parcourent les lignes A a, B b; il est clair (*art.* 64) que le chemin Cx du centre de gravité au premier instant, sera le même que si les Corps *A* & *B*, eussent décrit les lignes $A\alpha$, $B\beta$.

Dans

Dans l'instant suivant, les Corps tendent à décrire $a\epsilon = Aa$ & $b\delta = Bb$, & le centre *C* tend à parcourir la droite $xK = Cx$, la même qu'il eût parcouru, si les Corps eussent continué à se mouvoir suivant $A\alpha$, $B\beta$; mais comme, en vertu de la force accélératrice, les Corps *A* & *B*, décriroient les lignes paralléles ef, dg dans ce dernier cas, & dans l'autre cas les lignes $\epsilon\varphi$, $\delta\gamma$ qui leur sont égales & paralléles chacune à chacune, il s'ensuit que le chemin xk du centre de masse sera le même, soit que les Corps décrivent αf, βg, soit qu'ils décrivent les lignes $a\varphi$, $b\gamma$. Mais quelque autre ligne que les Corps *A*, *B* parcourent au lieu de $a\varphi$, $b\gamma$, à cause de leur action mutuelle, le chemin du centre *C* sera toujours le même (*Theor.* 1). Donc &c. On voit aisément que la démonstration s'étend aux cas où il y auroit un plus grand nombre de Corps.

REMARQUE.

67. Cette démonstration n'auroit pas lieu, si la force accélératrice n'étoit pas constante pour chaque Corps, & n'agissoit pas suivant des lignes paralléles. Car alors on ne pourroit pas supposer ef égale & paralléle à $\epsilon\varphi$; dg égale & paralléle à $\delta\gamma$; & par conséquent le chemin xk du centre ne seroit pas le même dans les deux cas.

COROLLAIRE.

68. Les deux Theorêmes précedens fournissent des moyens très-simples de trouver le Mouvement des Corps

inflexibles. Nous pourrons en donner quelques usages dans la suite.

THEORÊME III.

69. *Si tant de Corps qu'on voudra sont liés ensemble d'une maniére quelconque, & qu'un ou plusieurs de ces Corps soient forcés de se mouvoir sur un plan ou sur des plans paralléles, je dis que le chemin du centre de gravité parallélement à ces plans sera uniforme.*

[*Ainsi, par exemple, & pour fixer l'imagination, si un Corps* P, (Fig. 29) *forcé de se mouvoir dans la rainure droite* PS *dont il ne puisse sortir, traîne après lui un autre Corps* M *par le moyen d'une verge* PM, *le centre de gravité g de ces deux Corps décrira une Courbe telle, que les parties de la ligne* KS *répondantes aux Arcs parcourus par le centre g en tems égaux, seront égales.*]

Car en général, si on réduit en une seule force tous les Mouvemens perdus par ces Corps à chaque instant, il est clair qu'à cause de l'équilibre de ces Mouvemens, la direction de la force résultante sera nécessairement perpendiculaire aux plans. Donc le centre de gravité sera continuellement écarté de la ligne droite par une force dont la direction sera (*Lem.* 6. & *art.* 65) perpendiculaire à ces plans, & dont par conséquent l'action sera toujours paralléle à une ligne donnée. Donc &c.

COROLLAIRE.

70. La même proposition seroit encore vraye, si les

Corps étoient animés de forces accélératrices quelconques, conſtantes ou non, mais de directions perpendiculaires à ces plans. D'où il s'enſuit, que ſi les Corps ſe mouvoient par la ſeule action de ces forces ſans aucune impulſion primitive., le centre de maſſe décriroit une ligne droite perpendiculaire à ces plans. Car dans ce dernier cas, ſi les Corps étoient libres, le centre de gravité décriroit une droite perpendiculaire à ces plans ; or ſon Mouvement ne ſera altéré que par une force dont la direction ſera perpendiculaire à ces plans : donc le centre de gravité ne ſortira jamais de la perpendiculaire.

SCOLIE I.

71. Les propoſitions qu'on a démontrées *art.* 64 & 66, ſont également vrayes, quand les Corps agiſſent les uns ſur les autres par une force d'Attraction mutuelle. Car les chemins qu'ils feroient les uns vers les autres en vertu de cette Attraction, étant réciproques à leurs maſſes, la ſomme des Mouvemens de même part ſeroit zero ; par conſéquent le chemin du centre de gravité ne ſeroit point changé par l'action réciproque de ces Corps les uns ſur les autres. On peut d'ailleurs appliquer ici la démonſtration donnée du Theor. 1, en imaginant tous ces Corps joints les uns aux autres par des verges inflexibles. Car alors en n'ayant égard qu'à leur Attraction mutuelle, il eſt clair qu'ils reſteroient en équilibre. Donc &c.

SCOLIE II.

72. Il me ſemble que par les Principes établis juſqu'ici, on peut démontrer cette fameuſe Loi de Mecanique ; que dans un ſyſtême de Corps peſans en équilibre, le centre de gravité eſt le plus bas qu'il eſt poſſible. Car ſuppoſons le ſyſtême dans un état *B* infiniment proche de l'état d'équilibre ; il eſt certain qu'il y aura dans chaque Corps un petit Mouvement pour ſe remettre à l'état d'équilibre, & l'effort de la peſanteur de chaque Corps doit être regardé comme compoſé de ce petit Mouvement, & d'un autre qui eſt détruit. Or comme l'état *B* eſt infiniment proche de l'état d'équilibre, les Mouvemens détruits ſont infiniment peu différens de l'effort total de la peſanteur, qui eſt détruit dans l'état d'équilibre, & par conſéquent les Mouvemens réels de chaque Corps infiniment petits par rapport à ceux qu'ils auroient eus, s'ils avoient pû ſe mouvoir librement par leur peſanteur, & le Mouvement du centre de gravité infiniment moindre, que ſi les Corps ſe fuſſent mûs librement. Cela ne feroit pas ainſi, ſi des deux états infiniment proches que l'on conſidére ici, l'un n'étoit pas l'état d'équilibre. D'où il s'enſuit, qu'on peut regarder le centre de gravité comme n'ayant point changé de place depuis l'état *B* juſqu'à l'état d'équilibre ; c'eſt-à-dire qu'entre ces deux états la deſcente du centre de gravité eſt $= 0$. Donc dans l'état d'équilibre la deſcente du centre de gravité eſt un *Maximum*.

CHAPITRE III.

Problêmes où l'on montre l'usage du Principe précedent.

§. I.

Des Corps qui se tirent par des fils ou par des verges.

PROBLÊME I.

73. TROUVER *la vitesse d'une verge* CR *fixe en* C, (Fig. 22) *& chargée de tant de Corps* A, B, R, *qu'on voudra, en supposant que ces Corps, si la verge ne les en empêchoit, décrivissent dans des tems égaux les lignes infiniment petites* AO, BQ, RT, *perpendiculaires à la verge.*

Toute la difficulté se réduit à trouver la ligne RS parcourue par un des Corps R, dans le même tems qu'il eut parcouru RT; car alors les vitesses BG, AM de tous les autres Corps seront connues. Or regardons les vitesses imprimées RT, BQ, AO, comme composées des vitesses RS, ST; BG, $-GQ$; AM, $-MO$; par notre Principe, le Levier CAR seroit demeuré en repos, si les Corps R, B, A n'avoient reçu que les Mouvemens ST, $-GQ$, $-MO$. Donc $A \cdot MO \cdot AC + B \cdot GQ \cdot BC = R \cdot ST \cdot CR$, c'est-à-dire qu'en nommant AO, a; BQ, b, RT, c, CA, r, CB, r, CR, ρ, & RS, x, on aura $R . \overline{c - x} . \rho = Ar\left(\frac{xr}{\rho} - a\right) + Br\left(\frac{xr}{\rho} - b\right)$; par conſéquent $x = \frac{Aar\rho + Bbr\rho + Rc\rho\rho}{Arr + Brr + R\rho\rho}$.

COROL. I.

74. Soient F, f, φ, les forces motrices des Corps A, B, R, & on trouvera pour la force accélératrice du Corps R, $\frac{Fr + fr + \varphi\rho}{Arr + Brr + R\rho\rho} \times \rho$, en mettant pour a, b, c, leurs valeurs $\frac{F}{A}$, $\frac{f}{B}$, $\frac{\varphi}{R}$. Donc ſi on prend ds pour l'Elément de l'Arc décrit du rayon CR, & u pour la viteſſe du Corps R; on aura en général $\frac{Fr + fr + \varphi\rho}{Arr + Brr + R\rho\rho} . \rho ds = udu$. quelles que ſoient les forces F, f, φ. Il eſt aiſé par ce moyen de réſoudre le Problême des centres d'oſcillation dans une hypotheſe quelconque.

COROL. II.

75. De ce que $A . OM . AC + B . QG . CB = R . ST . CR$, il s'enſuit que $A . \overline{AM - AO} . CA + B . \overline{BG - BQ} . CB = R . \overline{RT - RS} . CR$, & qu'ainſi $A . AM . CA + B . BG . CB + R . RS . CR = A . AO . CA + B . BQ . CB + R . RT . CR$, c'eſt-à-dire que les puiſſances $A . AM$, $B . BG$, $R . RS$, doivent être équipollentes aux puiſſances $A . AO$, $B . BQ$, $R . RT$. On pourroit donc encore réſoudre le Problême précedent, en

cherchant la ligne RS telle que $R.RS.CR + B.\frac{RS.CB^2}{CR} + A.\frac{RS.CA^2}{CR}$ fût égale à $R.RT.CR + B.BQ.CB + A.AO.CA$.

Le Principe de cette dernière solution revient au même que celui de M. *Bernoulli* pour les centres d'oscillation, qui consiste à substituer en un point quelconque P de la verge un Corps, dont la masse soit $\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}$, & qui soit animé d'une force accélératrice, en vertu de laquelle le *moment* de ce poids soit égal aux *momens* des poids A, B, R, animés de leurs pesanteurs naturelles AO, BQ, RT, & sa vitesse, celle du point P de la verge. D'où il s'ensuit, que cette force accélératrice sera $\frac{RS.CP}{CR}$, & qu'ainsi on aura $RS.\frac{CP}{CR}$ $\left(\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}\right) \times CP = A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR$. Il est visible que le premier membre de cette égalité, n'est autre chose que la somme des *momens* $A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR$.

On voit par-là que sans avoir recours au point P, & sans faire aucune substitution de masses, on peut par le Principe fondamental de la solution de M. *Bernoulli*, résoudre, plus simplement encore qu'il ne l'a fait, le Problême des centres d'oscillation.

C'eſt de cette derniére maniére que j'avois imaginé d'abord de réſoudre ce Problême, & c'eſt auſſi ce qu'a fait M. *Euler* dans un Mémoire imprimé depuis peu, *To. 7. des Comm. de Peterſb.* & où il ſe ſert de ce dernier Principe, que les puiſſances $R.RS$, $B.BG$, $A.AM$ doivent être équivalentes aux puiſſances $R.RT$, $B.BQ$, $A.AO$. Mais M. *Euler* n'a point démontré ce Principe, qui, préſenté de cette maniére, n'eſt peut-être pas, en effet, ſi facile à démontrer. Au reſte, l'Auteur l'a appliqué dans ce même Mémoire à la ſolution de quelques Problêmes touchant les oſcillations des Corps, flexibles ou inflexibles. Nous aurons occaſion dans la ſuite de faire quelques remarques ſur un de ces Problêmes.

LEMME VII.

76. Si deux lignes infiniment petites Pp, Mm, (Fig. 23) ſont jointes par les lignes PM, pm, & qu'on faſſe $p\pi = Pp$, & $m\mu = Mm$. Je dis 1°. que l'excès de PM ſur $\pi\mu$ eſt égal à deux fois la différence de PM à pm, moins le quarré de l'angle fait entre PM & pm, multiplié par PM.

2°. Que l'angle de $\pi\mu$ avec pm eſt égal à l'angle de PM avec pm, multiplié par $1 + \frac{2.\overline{PM - pm}}{PM}$.

Car ayant mené les lignes Ma, πe, μf paralléles à pm, & Mb, aPd, $C\pi f$, μeg, perpendiculaires à pm, on aura $Mb = \mu g$; $Pd = \pi C$. Donc μe ou $\pi f = Pa$. Donc les angles aMP, $e\pi\mu$ ſont égaux, à une différence ſeconde de près. Or $PM - pm = PM - Ma + Ma - Pm = \frac{Pa^2}{2PM} + mb - dp$; & on trouvera de même $pm - \mu\pi = -\frac{\pi f^2}{2\pi\mu} + mg - cp$. Donc en négligeant les différences troisiémes, on a $PM - \pi\mu = 2 . \overline{bm - dp} = 2 . \overline{PM - pm} - \frac{Pa^2}{PM} = 2 . \overline{PM - pm} - \text{angl. } \overline{aMP}^2 \times PM$.

2°. L'angle $e\pi\mu$ ou l'angle de pm avec $\pi\mu = \frac{\mu e}{\pi e} = \frac{Pa}{pm - (bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma - 2(bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma} + \frac{2 . \overline{bm - dp}}{Ma} \times \frac{Pa}{Ma}$ = en négligeant les différences troisiémes, à l'angle $aMP \left(1 + \frac{2 . \overline{PM - pm}}{PM}\right)$. Ce Q. F. D.

COROL. I.

77. Si les lig. PM, pm sont égales, alors $PM - \pi\mu = -(\text{angl. } aMP)^2 . PM$, & l'angle $e\pi\mu = aMP$. Ces deux derniers Theorêmes ont été démontrés par M. *Clairaut*. *Mem. Acad.* 1736.

COROL. II.

78. Si les lignes Mm, $m\mu$ (Fig. 24) sont $= 0$, alors $M\pi - PM = + 2pO + \frac{pO^2}{PM}$, & l'angle $pM\pi - PMp = -\frac{2pO}{PM} . PMp$.

PROBLÊME II.

79. *Supposons qu'une verge* GA *fixe en* G (Fig. 25) *& située sur un plan horizontal, soit chargée de deux Corps* A, D, *dont l'un* A *soit fixement attaché à la verge, l'autre* D *puisse couler librement le long de la verge par le moyen d'un anneau ; on demande la vitesse de chacun de ces Corps à chaque instant, & la Courbe décrite par le Corps* D.

Soient AB, DE les petites lignes décrites par les Corps A, D, durant un même instant; si l'on fait l'Arc $BC = AB$, & la ligne $Ei = ED$ & dans la même direction, il est clair que ces lignes BC, Ei seroient parcourues par les deux Corps dans l'instant suivant, si la verge ne les en empêchoit. Le Corps A qui décrit nécessairement l'Arc BC, ne décrira donc plus cet Arc dans un instant égal au premier: or que la ligne ou Arc BQ infiniment peu différente de BC, soit celle que le Corps A auroit parcouru uniformément avec la vitesse qu'il a en B, dans l'instant qu'il parcourt BC par son Mouvement contraint, & que Eo soit la ligne que le Corps D eut aussi décrit uniformément dans le même tems, & au lieu de laquelle il décrive la ligne Ep à cause de la résistance de la verge; il est clair qu'en regardant les Mouvemens BQ & Eo, comme composés des Mouvemens BC, CQ, & Ep, El, le Levier GB eût été en équilibre, si les Corps A, D, n'avoient eu que les Mouvemens CQ, El. Or comme (*hyp.*) le Corps E peut glisser le long de la verge, il eſt néceſſaire pour l'équilibre, que El ſoit perpendiculaire au Levier GA; & de plus, il faut que $A.CQ.CA = D.El.GE$. Cela poſé.

Soit $GA = a$, $AB = dx$, $GD = y$, $FD = \frac{ydx}{a}$, $FE = dy$, $CQ = \alpha$, on aura (à cauſe que les lignes BQ, AB; Eo, DE ſont entr'elles comme les tems employés à les parcourir) $BC.CQ :: DE.io$. Donc $io = \frac{CQ.DE}{BC}$; de plus $A.CQ.CA = D.El.GE$ donne El ou $po = \frac{A\alpha a}{Dy}$. Or l'angle iGE (*art.* 78) $= EGD \times 1 - \frac{2FE}{GD} = EGD - \frac{2dydx}{ay}$; & ſi à l'angle iGE on ajoûte l'angle $iGo = \frac{io}{Gi} \times \frac{DF}{DE} = \frac{CQ.DF}{Gi.BC} = \frac{CQ}{GD} \times \frac{DF}{AB} = \frac{CQ}{GA} = \frac{\alpha}{a}$; & l'angle oGp ou $\frac{po}{GD} = \frac{A\alpha a}{Dyy}$, on aura l'angle $pGE = EGD - \frac{2dydx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{A\alpha a}{Dyy}$, & comme cet angle pGE eſt égal à l'angle EGD (*conſtr.*) on a $- \frac{2dydx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{A\alpha a}{Dyy} = 0$. Donc $\alpha = \frac{2Dydydx}{Aaa + Dyy}$.

Préſentement, la différence de Gi ſur GD eſt (*art.* 78) $2dy + \frac{y^2dx^2}{a^2y}$, & $\frac{ady}{dx}$ eſt égale à la différence de Gp ou Go ſur Gi. Donc $Gp - GE = dy + \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{ady}{dx}$. Donc

$ddy = \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{\alpha dy}{dx}$, ou mettant pour α sa valeur déja trouvée, $ddy = \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{2Dydy^2}{Aaa + Dyy}$, Equation de la Courbe DEp.

Pour en séparer les indéterminées, soit $dx = \frac{pdy}{a}$, on aura $ddy = -\frac{dpdy}{p}$, & $-\frac{a^4 dp}{p^3} - \frac{2ydy \cdot a^4 D}{p^2 \cdot (Aaa + Dyy)} = ydy$ dont l'intégrale est $\frac{a^4}{2p^2 (Aaa + Dyy)^2} = G - \frac{1}{2D(Aaa + Dyy)}$, G exprimant une constante telle, que $\frac{p}{a}$ devienne à l'origine de la Courbe le rapport donné de dx à dy. On a donc dx ou $\frac{pdy}{a} = \frac{ady\sqrt{D}}{\sqrt{(Aaa + Dyy)[2GD(Aaa + Dyy) - 1]}}$ pour l'Equation de la Courbe DEp.

A l'égard des vitesses de chaque Corps, on trouve qu'en nommant u la vitesse du Corps A, on a $-\frac{du}{u} = \frac{CQ}{BC}$, puisque $\frac{BQ}{BC}$ est le rapport du second instant au premier. Donc $-\frac{du}{u} = \frac{2Dydy}{Aaa + Dyy}$, & $\frac{u}{g} = \frac{Aaa + Dbb}{Aaa + Dyy}$ en prenant g pour la vitesse initiale du Corps A, & supposant $y = b$ à l'origine de la Courbe DE. De même si on nomme v la vitesse du Corps D, on a $\frac{dv}{v} = \frac{Ep - Eo}{Eo} = \frac{po \cdot FD}{DE^2} = \frac{Aaa \cdot ydx}{Dyy \cdot a\left(dy^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2}\right)}$; mais on peut avoir v plus élégamment par le Principe de la conſervation des forces vives que nous démontrerons ci-après, & qui donne $Dvv + Auu =$ à une conſtante. D'où il s'enſuit, que ſi on appelle h la viteſſe initiale du Corps D, on aura $vv = \frac{Dhh + Agg - Auu}{D}$.

REMARQUE I.

80. J'ai évité de faire dans la ſolution de ce Problême les dt ou Elémens du tems conſtans, afin de pouvoir parvenir à l'Equation de la Courbe, ſans avoir l'expreſſion de la viteſſe, ce qui ſeroit néceſſaire ſi on faiſoit les dt conſtans, parce que dt étant $\frac{dx}{u}$, on ne peut chaſſer dt que quand on connoît la valeur de u. C'eſt ainſi que j'en uſerai toujours dans la ſuite. Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe avoir u par différens moyens. Mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir de quelle maniére on peut s'en paſſer dans la ſolution de ces ſortes de Problêmes.

REMARQUE II.

81. Le Problême précédent ne ſeroit pas beaucoup plus difficile, ſi les Corps A, D, étoient animés par des forces accélératrices p, f, de directions & de valeurs quelconques. Pour donner un eſſai du calcul qu'il faudroit faire en cette occaſion, je ſuppoſerai chaque force accélératrice conſtante, & dirigée parallélement à la verticale AV, en imaginant le ſyſtême tranſporté ſur un plan vertical. La conſtruction demeurant la même que dans

l'art. 79; ſoit de plus QN l'eſpace que le Corps A auroit parcouru par ſa peſanteur p, dans l'inſtant qu'il parcourt BC par ſon mouvement contraint; comme cet inſtant différe infinim. peu du premier, on aura $QN = p.\frac{GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2}$; de même $oz = \frac{fdx^2}{u^2}$; $z\pi = \frac{A.CN.GA}{D.DG} = \frac{Aa}{Dy}(\alpha + \frac{pzdx^2}{au^2})$ en nommant GV, z. On aura enſuite, comme dans *l'art.* 79. $\frac{2ydxdy}{ayy} = (\alpha + \frac{pzdx^2}{au^2}) \times \frac{Aa}{Dyy} + \frac{a}{a} + \frac{fdx^2}{u^2} \times \frac{z}{y}$. & $ddy = \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{ady}{dx} + \frac{fdx^2.\sqrt{[a^2 - z^2]}}{au^2}$: on a de plus $dx = \frac{adz}{\sqrt{[aa - zz]}}$ & $-\frac{du}{u} = \frac{a}{dx}$. Si on met la valeur de α tirée de cette derniére Equation, dans la premiére, on aura en intégrant, la valeur de u en y & en z avec leurs différences; & mettant enſuite cette valeur de u dans la ſeconde Equation, on aura l'Equation cherchée de la Courbe DEp.

REMARQUE III.

82. Si une puiſſance appliquée au Corps A l'oblige de ſe mouvoir ſur la Courbe AB, avec une viteſſe dont la Loi à chaque point ſoit donnée, & qu'on demande la Courbe du Corps D & ſa viteſſe; ce Problême ſe réduit au précedent, en cherchant de quelle force accélératrice φ le Corps A devroit être animé, pour qu'étant

mû conjointement avec le Corps D, il eut à chaque point B la viteſſe donnée.

Dans la premiére des quatre Equations de l'article précedent, on mettra φ pour $\frac{pz}{a}$, & à cauſe que u eſt donnée en x, on ſuppoſera $u = X$, & $-\frac{du}{u} = -\frac{dX}{X} = \frac{\alpha}{dx}$. Donc $\alpha = -\frac{dXdx}{X}$: cette valeur de α étant comparée à celle qu'on tirera de la premiére Equation, on aura la valeur de φ & l'Equation de la Courbe DEp. Soit par ex. $f = 0$, $u =$ à une conſtante g, on aura $\alpha = 0$, &

$$\frac{2dydx}{ay} = \frac{\varphi dx^2}{g^2} \cdot \frac{Aa}{Dyy} \text{. donc } \varphi = \frac{2Dg^2ydy}{Aa^2dx}, \; \& \; ddy = \frac{ydx^2}{a^2}.$$

$$\text{donc } dx = \frac{ady}{\sqrt{[2(Ga^2+yy)]}} \; \& \; \varphi = \frac{2Dg^2y}{Aa^3}\sqrt{[2(Ga^4+yy)]}.$$

$$\text{Si } G = 0 \text{. on a } y = c^{\frac{x\sqrt{2}}{a}} \; \& \; \varphi = \frac{2Dg^2\sqrt{2}\,.\,c^{\frac{2x\sqrt{2}}{a}}}{Aa^3}.$$

La Courbe décrite par le Corps D eſt en ce cas une *ſpirale logarithmique.*

S'il n'y avoit pas de Corps au point A, mais qu'en vertu d'une puiſſance quelconque appliquée à la verge, la viteſſe du point A ſuivant AB fut donnée, on pourroit réſoudre le Problême de la même maniére, en imaginant qu'il y eut au point A un Corps de maſſe quelconque, & en cherchant de quelle force accélératrice ce Corps devroit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le Corps D, il eut à chaque point B la viteſſe.

dont la Loi eſt donnée ; & en général, on peut toujours employer cette Méthode, lorſque des Corps ſe tiennent par des fils ou par des verges d'une maniére quelconque, & qu'un ou pluſieurs points des fils ou des verges ſont ſuppoſés ſe mouvoir avec une viteſſe & une direction données. J'avoue qu'on peut réſoudre ces Problêmes d'une maniére plus ſimple, ſans chercher quelle doit être la force accélératrice du Corps dont la viteſſe eſt donnée, pour qu'il ſe meuve avec cette viteſſe en vertu de l'action des autres Corps ; mais la ſolution que nous propoſons ici, quoique plus longue, n'en eſt pas moins tirée des vrais Principes de la choſe, puiſqu'il eſt certain que la puiſſance qui meut le Corps avec une viteſſe donnée, eſt différente de ce qu'elle ſeroit, ſi tous les autres Corps étoient anéantis, attendu qu'une partie de cette puiſſance eſt employée à vaincre l'action de ces mêmes Corps. Notre ſolution détermine la différence de ces deux puiſſances, & c'eſt en quoi conſiſte, ce me ſemble, la vraye Métaphyſique du Problême dont il s'agit.

REMARQUE IV.

83. On voit aiſément qu'au lieu de deux Corps A, D on peut en ſuppoſer tel nombre qu'on voudra, dont les uns ſoient fixement attachés à la verge, les autres puiſſent couler librement le long de la verge ; les calculs ſeront ſeulement un peu plus longs, mais le Problême ſe réſoudra toujours par les mêmes Méthodes.

PROBLEME

PROBLEME III.

84. *Un Corps* P *descendant le long d'une Courbe* C B, (Fig. 26) *& tirant après lui un autre Corps* F *par le moyen d'un fil* P C F *qui passe sur une Poulie* C, *trouver la vitesse de chacun de ces Corps.*

Soit Pp l'Elément parcouru dans un instant par le Corps P, & $Ff = pV$ l'Elément parcouru par l'autre Corps durant le même instant. Dans l'instant suivant, ces Corps, si rien ne les en empêchoit, parcourroient $p\pi = Pp$ & $f\varphi = Ff$. Mais à cause de la résistance du fil & de son inextensibilité, la ligne $p\pi$ sera parcourue par le Corps P dans un instant différent du premier, & dans ce même instant le Corps F arrivera au point ϖ, tel que $\varpi C + C\pi = fC + Cp$.

Supposons présentement, que durant le tems que le Corps P parcourt $p\pi$, il eut parcouru naturellement pi, & que le Corps F eut décrit naturellement $f\omega$; que de plus, la pesanteur du Corps F lui eût fait parcourir pendant ce même instant la verticale ωv, & que la partie de la pesanteur du Corps P, qui agit suivant pi, lui eût fait parcourir la ligne il. Si on prend $po = \pi l$, il faut par notre Principe, que le Corps F animé de la seule force accélératrice représentée par ωv fasse équilibre au Corps P animé de la force po, & de la partie de sa pesanteur & de sa force centrifuge qui est perpendiculaire à la Courbe Cp suivant pZ. Or en menant du point o la ligne $o\alpha$ qui rencontre Cp prolongée en α, & tirant αu, il est clair que le reste de la force suivant pZ étant anéanti par la résistance de la surface Courbe, il y aura équilibre, si $F.\varpi\nu = P.p\alpha$.

Soit donc u la vitesse du Corps P, p sa pesanteur absolue, g celle du Corps F, $CP = x$, $NP = y$, $Pp = ds$, $\pi i = \alpha$; on aura $il = \frac{pdy.ds^2}{u^2 ds}$ & $\varphi\omega.Ff :: i\pi.Pp$. c'est-à-dire $\varphi\omega = \frac{\alpha dx}{ds}$; $\omega\nu = \frac{gds^2}{u^2}$: soit $\varpi\nu = n$; on trouve $\varphi\varpi$ ou $-ddx = \frac{\alpha dx}{ds} + \frac{gds^2}{u^2} - n$; de plus, à cause de $F.\varpi\nu = P.p\alpha$, on a $F.n = P.\frac{p\alpha.ds}{dx} = \frac{Pds}{dx}.(\frac{pdy.ds^2}{u^2ds} - \alpha)$. Donc $Fddx + \frac{Fgds^2}{u^2} + \frac{F\alpha dx}{ds} = -\frac{P\alpha ds}{dx} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx}$; par conséquent $\alpha = \frac{-Fddx - \frac{Fgds^2}{u^2} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx}}{Fdx^2 + Pds^2} \times dsdx$. mais $\frac{\alpha}{ds} = \frac{du}{u}$. donc $-\frac{Pu^2dxddx - Fgds^2dx + Ppds^2dy}{Fdx^2 + Pds^2} = udu$ ou $2udu.\frac{(Fdx^2 + Pds^2)}{Pds^2} + \frac{2Fuudxddx}{Pds^2} = 2pdy - \frac{2Fgdx}{P}$, dont l'intégrale complette (en supposant $u = o$ lorsque y & $x = o$) est $\frac{uu.(Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} = 2py - \frac{2Fgdx}{P}$; & faisant $uu = 2pk$, on trouve $k = \frac{ds^2.(Py - \frac{Ffx}{P})}{Pds^2 + Fdx^2}$

COROL. I.

85. Si on fait $g = p$, on trouve $k = \frac{ds^2 . (Py - Fx)}{Pds^2 + Fdx^2}$, ce qui s'accorde avec la formule donnée sans démonstration par M. *Bernoulli*, *To.* 2. *des Mém. de Petersb.* & peut se tirer aisément du Principe de la conservation des forces vives.

COROL. II.

86. Si p & $g = o$. c'est-à-dire, si les deux Corps n'ont point de pesanteur, on a $\frac{uu . (Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} =$ à une constante.

COROL. III.

87. Le Problême précedent se résoudroit avec la même facilité si les deux Corps étoient pesans, & qu'ils fussent mûs dans un milieu résistant comme une fonction de la vitesse. Car alors il ne faudroit que mettre $\frac{pdy}{ds} - \varphi u$* au lieu de p, & dans l'Equation du Problême, $g + \varphi (\frac{udx}{ds})$ au lieu de g, on auroit une Equation dont les indéterminées pourroient même être séparés dans quelques cas, comme quand $\varphi u = a + buu$, a & b étant des constantes quelconques.

COROL. IV.

88. Si chacun des deux Corps étoit mû sur une Cour-

* Cette quantité φu exprime en général une fonction de u.

be, alors nommant Ff, dt; Fu, dx; FN, dz; (Fig. 27) on trouveroit $\varphi\omega = \frac{udt}{ds}$; $\omega v = \frac{gdz}{dt} \cdot \frac{ds^2}{u^2}$; au lieu de Fn il faudra mettre $\frac{Fndt}{dx}$, & au lieu de $-ddx = \frac{udx}{ds} + \frac{gds^2}{u^2} - n$, on écrira $-ddt = \frac{udt}{ds} + \frac{gdz}{ds} \cdot \frac{ds^2}{u^2} - n$. le Problême sera résolu moyennant ces legers changemens, & l'on trouvera $d\left[\frac{uu.(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2}\right] = 2pdy - \frac{Fgdz}{P}$. Equation qu'on pourroit trouver aussi en se servant du Principe de la conservation des forces vives. Donc si la valeur primitive de u est zero, & qu'alors y soit $= A$, & $z = 0$, on aura $\frac{uu.(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2} = 2p.(y - A) - \frac{2Fgz}{P}$.

COROL. V.

89. Si dans l'article précedent on fait $uu = 2pk$ & $p = g$; on aura $k = \frac{[P(y - A) + Fz].ds^2}{Pds^2 - Fdt^2}$. On peut, si l'on veut, faire $A = 0$, en supposant que le Corps P parte de C, & l'on aura $k = \frac{(Py - Fz)ds^2}{Pds^2 + Fdt^2}$.

M. *Herman*, *To.* 2. *des Mém. de Petersb.* a donné une solution du Problême que nous avons résolu *art.* 88. Sa formule revient à celle-ci $k = \frac{\left[Py - \int \frac{Fdx^2dz}{dt^2}\right] ds^2}{Pds^2 + Fdx^2} =$

(en faisant $dt^2 = dx^2 + dq^2$) $\frac{[Py - Fz + \int \frac{F dz dq^2}{dt^2}] ds^2}{P ds^2 + F dx^2}$.

Or la valeur de k que nous avons trouvée se peut changer en celle-ci $\frac{2p[(Py - Fz).ds^2 - Fu^2 dq^2]}{2p(P ds^2 + F dx^2)}$, expression qui ne sauroit revenir au même que celle de M. *Herman*, puisque la quantité négative $- Fu^2 dq^2$ ne sauroit être égale à la positive $(\int \frac{F dz dq^2}{dt^2}) 2 p ds^2$. Il y a donc lieu de croire qu'il s'est glissé quelque inadvertance dans la solution de M. *Herman*, parce que le résultat de nôtre solution s'accorde avec celui qu'on trouveroit par le Principe de la conservation des forces vives, & que d'ailleurs elle n'est appuyée que sur des Principes fort clairs.

SCOLIE.

90. La solution du Problême III. pourra paroître un peu longue : mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir comment mon Principe s'y applique. Car si on vouloit résoudre autrement ce Problême, on pourroit s'y prendre ainsi. Soit T la tension du fil, qui agit également suivant CP, & CF, on aura $\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}$ pour la force qui accélére le Corps P suivant Pp, & $\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}$ pour celle qui accéléte le Corps F suivant Ff; on aura donc $(\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}) ds = Pudu$ & $(\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}) dt =$

$\frac{F}{2} d\left(\frac{uudt^2}{ds^2}\right)$ d'où l'on tire en ajoûtant ces deux Equations, & intégrant ; $uu + \frac{uuFdt^2}{pds^2} = 2py - \frac{2Fgz}{p}$.

Cette derniére solution peut servir à trouver le défaut de celle de M. *Herman* ; mais c'est une discussion dans laquelle il seroit trop long d'entrer. Au reste, cette solution est, à la verité, plus simple que celle de *l'art.* 88 ; mais je crois que d'un autre côté elle n'est pas tout-à-fait si lumineuse ni si directe. Car, à parler exactement, le fil n'agit point sur les Corps, il n'a qu'une force de résistance, & nullement d'impulsion.

PROBLÊME IV.

91. *Un Corps P étant mû dans une rainure Courbe* $APp\pi$, (Fig. 28) *où il est animé d'une force accélératrice quelconque* φ, *& traînant après lui deux autres Corps M*, M, *par le moyen d'une verge inflexible MP*M, *on demande la vitesse du Corps P & les Courbes décrites par les deux Corps M*, M.

Soient Pp, MR, MR les lignes décrites par les Corps P, M, M durant un instant quelconque ; je fais $p\pi = Pp = p\varpi$, & je suppose que dans l'instant que le Corps P parcourt $p\pi$ par son Mouvement contraint, il eut parcouru naturellement & uniformément pf, & de plus fq en vertu de la force φ ; je fais de plus $Ri = MR$; Ri = MR ; & je suppose que dans le même tems que le Corps P parcourt $p\pi$, le Corps M eut parcouru RK ; & le Corps M, RK. Il faut par notre Principe décomposer la force suivant RK en deux autres RZ, Re, &

la force suivant R K en deux autres R Z, R e, qui soient telles, que si les Corps *P*, *M*, M, n'étoient animés que des seules forces πq, RZ, RZ, ils se fissent équilibre & que le systême demeurât en repos, & que s'ils n'avoient que les Mouvemens $p\pi$, Re, R e, ils pussent conserver ces Mouvemens sans se nuire réciproquement, c'est-à-dire que l'on eût $\pi e = PM$, πe $= PM$, & ee $= MM$.

Je décompose d'abord la force suivant RZ en deux autres, dont l'une RV soit dans le prolongement de pR; & de même la force suivant RZ en deux, dont l'une RV soit dans le prolongement de pR, & je suppose RV & RV telles, que les Corps *P*, *M*, M animés des seules forces πq, RV, RV se fassent équilibre, ce qui arrivera, si en imaginant ces forces réunies en p, la force unique qui en résultera est perpendiculaire à la rainure; c'est-à-dire si $P \times \pi q = \frac{M \cdot RV \cdot GP}{PM} + \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{RV} \cdot gP}{\mathrm{PM}}$. (A).

Il ne restera plus aux Corps *M*, M que les forces RX, RX qui doivent encore se détruire mutuellement, ce qui ne peut arriver que quand ces lignes RX, RX sont dans la même droite RR, & qu'on a $M . RX =$ M. RX. (B).

Soit à présent $PM = a$; $GM = y$, gM $=$ y, PM $= b$, la perpendiculaire constante $PQ = c$, la ligne MM ou RR, e, u la vitesse en P suivant Pp; $Pp = dx$, $\pi f = \alpha$, $RX = z$, R x $=$ z, on aura $fq = \frac{\phi ds^2}{u^2}$, & $\pi q = \alpha + \frac{\phi ds^2}{u^2}$.

Si du centre p on décrit l'Arc $\pi\varpi$, & qu'on tire les lignes πi, πK; Ro parallèle à VK; oe sera égale & parallèle à RX, & l'on aura 1°. $\varpi i - pR = \frac{ady^2}{a^2 - y^2}$ (*art.* 78); $\pi i - \varpi i = \frac{\varpi\pi . MG}{MP} = \frac{ydx^2}{ra}$, en nommant r le rayon de la développée de la Courbe APp en P. 2°. Si on décrit du centre L les Arcs MN, PT, & du centre π l'Arc * iY, on aura YK ou $\pi i - \pi K = \frac{iK . RN}{MR}$, ou (à cause que $iK . MR :: \pi f . Pp$) $YK = \frac{\pi f . RN}{Pp} = \frac{\pi f . pT}{Pp} = \frac{\pi f . PG}{MP} = \frac{a\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a}$. 3°. $\pi K - \pi o = Ko = RV$ & $\pi o - \pi e = \frac{oe . MQ}{MP} = \frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a}$. Donc $\pi e - pR$ ou $\pi e - PM = - \frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a} - RV - \frac{a\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + \frac{ydx^2}{ar} + \frac{ady^2}{a^2 - y^2}$. mais la ligne πe doit être $= PM$. Donc

$$\text{(C)} \quad \frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a} + RV + \frac{a\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + \frac{ydx^2}{ar} + \frac{ady^2}{a^2 - y^2}.$$

On aura de même pour l'autre Corps M, $\frac{z\sqrt{[b_2 - c^2]}}{b} + RV + \frac{a\sqrt{[b^2 - y^2]}}{b} = - \frac{ydx^2}{br} + \frac{bdy^2}{b^2 - y^2}$. (*D*)

* L'angle $\pi i K$ ne diffère qu'infiniment peu de l'angle aigu PMR, quoique cela ne paroisse guère dans la figure, où l'on a été obligé pour éviter la confusion, de faire assez grandes les lignes MR, Ri qu'on suppose infiniment petites. D'où l'on voit que l'Arc iY doit tomber au-delà de iK par rapport à π, & qu'on aura un triangle iYK semblable à MRN.

Je

Je remarque ensuite, que $\frac{MN - PT}{PM}$ est égal à l'angle de pR avec PM, & que cet angle lui-même $= \Gamma pR - GPM + \Gamma pP = \frac{dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} + \frac{dx}{r}$. Donc $MN = PT + PM \times (\frac{dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} + \frac{dx}{r}) = \frac{ydx}{a} + \frac{ady}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} + \frac{adx}{r}$. or l'angle de ϖi avec pR est égal (*art.* 78) à l'angle de pR avec PM; l'angle de ϖi avec $\pi i = \frac{\varpi\pi . PG}{PM^2}$; l'angle de πi avec $\pi K = \frac{i\Upsilon}{PM} = \frac{iK . MN}{MR . PM} = \frac{\pi f . MN}{Pp . MP}$; l'angle de πK ou πo avec $\pi e = \frac{oe . PQ}{PM^2} = \frac{zc}{a^2}$. Donc l'angle de πe avec pR, c'est-à-dire la différence seconde de l'angle de pR & PM, sera égal à la somme de tous ces angles pris avec les Signes convenables, c'est-à-dire qu'on aura (E) $d\,(\frac{dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} + \frac{dx}{r}) = \frac{dx^2 . \sqrt{[a^2 - y^2]}}{a^2 r} + \frac{a}{adx}(\frac{ydx}{a} + \frac{ady}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} + \frac{adx}{r}) - \frac{zc}{a^2}$: on aura de même (F) $d\,(\frac{dy}{\sqrt{[b^2 - y^2]}} - \frac{dx}{r}) = - \frac{dx^2 \sqrt{[b^2 - y^2]}}{b^2 r} + \frac{a}{bdx}(\frac{ydx}{b} + \frac{bdy}{\sqrt{[b^2 - y^2]}} - \frac{bdx}{r}) - \frac{zc}{b^2}$.

Si on met ensuite dans les Equations A & B ci-dessus, à la place des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on aura

$$P\left(\alpha + \frac{\phi dx^2}{u^2}\right) = \frac{M . RV . \sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + \mathrm{M} . \mathrm{RV} . \frac{\sqrt{[b^2 - \mathrm{y}^2]}}{b}$$

(G); $\frac{M}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{z}}{z}$ (H); & enfin $\frac{\alpha}{dx} = \frac{du}{u}$ (L).

On remarquera de plus, qu'à cauſe de l'inflexibilité de la verge, l'angle $MP\mathrm{M}$ eſt conſtant, deſorte que $\frac{\mathrm{y}}{b}$ eſt toujours donné en $\frac{y}{a}$. Employant donc les ſept derniéres Equations à chaſſer α, u, RV, RV, z & z, on arrivera à une Equation finale qui ne contiendra plus que dx avec y, dy, ddy, & qui ſera l'Equation d'une des Courbes. Après quoi il ſera aiſé de trouver l'autre.

REMARQUE I.

92. Si MP, $P\mathrm{M}$ étoient des fils, alors les forces ſuivant RX & RX ſeroient nulles, & on auroit $z = o$ & z $= o$. Mais comme y ne ſeroit plus donné en y, on auroit ſix Equations, & cinq inconnues α, y, RV, RV, & u à faire diſparoître.

COROL. I.

93. Suppoſons pour ſimplifier les choſes que $r = \infty$, $b = o$. $\varphi = o$, c'eſt-à-dire que le Corps P ſoit dans une rainure droite & tire après lui un ſeul Corps M, par le moyen d'une verge ou d'un fil, ce qui dans le cas pré-

ſent revient au même ; on aura $RV = \frac{Paa}{MV[a^2 - y^2]} = - \frac{aV[a^2 - y^2]}{a} + \frac{ady^2}{a^2 - y^2}$; d'où l'on tire $a = \frac{Mady^2}{V[a^2 - y^2]} \times \frac{a}{Paa + M(a^2 - y^2)}$ & $d(\frac{dy}{V[a^2 - y^2]}) = \frac{a}{adx} \times (\frac{ydx}{a} + \frac{ady}{V[a^2 - y^2]}) = \frac{Maady^2}{V[a^2 - y^2](Paa + M[a^2 - y^2])} \times (\frac{y}{aa} + \frac{dy}{dxV[a^2 - y^2]})$

Soit $dx = \frac{pdy}{a}$, & l'on trouvera après les ſubſtitutions $\frac{-pV[a^2 - y^2]}{V[Paa + M(a^2 - y^2)]} = A + \frac{May}{V[Paa + M(a^2 - y^2)](M + P)}$, A marquant une conſtante priſe avec cette condition, que le rapport de dx à dy exprimé par $\frac{p}{a}$ ſoit $=$ au rapport donné de ces différentielles, lorſque les Corps commencent à ſe mouvoir.

COROL. II.

94. Soit dans le Corollaire précedent, la conſtante $A = 0$, on trouve $p = - \frac{M}{M+P} \cdot \frac{ay}{V[a^2 - y^2]}$ & $dx = - \frac{Mydy}{(M+P)[Va^2 - y^2]}$.

Cette derniére Equation fait voir que dans ce cas, la Courbe cherchée eſt Geométrique. Pour la conſtruire, on ſuppoſera que CP (Fig. 29) ſoit la poſition du fil au premier inſtant, & ayant décrit du centre P l'Arc

CMK, & abaissé d'un point quelconque M la perpendiculaire MG, on prendra $NS = GP$, puis $PO = \frac{PS.M}{M+P}$; & ayant tiré OT égale & parallele à PM, le point T sera un des points de la Courbe. Pour en trouver l'Equation par rapport aux coordonnées NQ, QT, on remarquera que $QT = MG = y$, & appellant NP, f; NQ, t; on verra que $NQ = BT = OS = \frac{PS.P}{M+P} = \frac{NG \times P}{M+P} = [\sqrt{(aa-yy)} - f] . \frac{P}{M+P}$. On a donc $t = [\sqrt{(aa-yy)} - f] . \frac{P}{M+P}$, & $t + \frac{fP}{M+P} = \frac{P}{M+P} \times \sqrt{[aa-yy]}$, ce qui est l'Equation d'une Ellipse dont le centre D se trouvera en faisant $ND = \frac{NP.P}{M+P}$, & dont les deux Axes sont $DE = a$, & $DX = Cg = \frac{a.P}{M+P}$.

Donc lorsque l'impulsion primitive des Corps P & M sera telle, que le premier dx soit au premier dy comme $\frac{-Ma}{(M+P)\sqrt{[a^2-y^2]}}$ est à 1, le Corps M décrira une Ellipse, telle qu'on vient de la déterminer.

COROL. III.

95. Si l'on fait $P = m.M$, la valeur générale de dx est $-\frac{ydy}{(1+m).\sqrt{[a^2-y^2]}} - \frac{Ady\sqrt{[(1+m).a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$, ce qui fait voir que si A n'est pas $= o$, la Courbe à la verité

n'eſt pas Geométrique, mais peut ſe conſtruire par la rectification de l'Ellipſe. Car $\frac{dy\sqrt{[(1+m)a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}} = \frac{dy\sqrt{[(1+m).qa^2-qy^2]}}{\sqrt{q}.\sqrt{[a^2-y^2]}}$: or la formule générale de l'Elément de l'Ellipſe étant $\frac{dy\sqrt{[a^2+(\frac{p}{2a}-1).y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$, ſi on fait $(1+m).q=1$, & $-q=\frac{p}{2a}-1$, on trouvera $q=\frac{1}{1+m}$ & $\frac{p}{2a}=\frac{m}{1+m}$; d'où il s'enſuit que $\frac{dy\sqrt{[(1+m)a^2-y^2]}}{\sqrt{[a^2-y^2]}}$ eſt l'Elément d'un Arc d'Ellipſe, dont l'abſciſſe eſt y, le grand Axe $=2a$, & le rapport du paramétre à cet Axe, $\frac{m}{1+m}$, cet Arc étant diviſé par $\sqrt{q}$ ou multiplié par $\sqrt{[1+m]}$; ou, ce qui revient à la même choſe, c'eſt l'Elément d'un Arc d'Ellipſe dont le grand Axe $=2a\sqrt{[1+m]}$, l'abſciſſe $=y\sqrt{[1+m]}$, & le rapport du paramétre à l'Axe $=\frac{m}{1+m}$.

REMARQUE II.

96. Ce que nous venons de dire dans les deux Corollaires précedens, & qui a été déduit du Problême général, peut ſe déduire d'une maniére plus ſimple de deux Theorêmes que nous avons donnés au commencement de cette ſeconde Partie, ſçavoir que le centre

de gravité g des Corps P, M, (Fig. 30) descend dans une ligne droite perpendiculaire à la rainure PQ, ou au moins que son Mouvement parallélement à PQ est uniforme. Car quand le centre g descendra dans une ligne droite SgV, il est clair par les Sections comiques, que le point M décrira une Ellipse ; & dans les autres cas, il n'y a qu'à imaginer que le point g descende dans une droite perpendiculaire à la rainure, tandis que le point P avance vers Q, & que le point M décrit une Ellipse, & faire mouvoir ensuite tout le systême parallélement à PQ, avec la vitesse uniforme que doit avoir le centre de gravité parallélement à PQ. Il est à remarquer que tout ceci a lieu, même lorsque les Corps P, M, sont pesans, pourvû que la rainure PQ soit alors horizontale.

Soient PQ, MN les vitesses primitivement imprimées aux Corps P, M, on décomposera la vitesse MN en deux autres, dont l'une MR soit perpendiculaire, & l'autre MS paralléle à la rainure, on prendra sur RN la partie RT telle, que $M.RT = P.PQ$; TN sera la vitesse du centre de gravité parallélement à PQ, & le Problême sera entiérement résolu, si, abstraction faite de la vitesse commune TN, on trouve la vitesse du point M dans son Ellipse & celle du point P. C'est ce qu'on trouvera facilement par le Principe de la conservation des forces vives, que nous démontrerons ci-après. Voilà, comme l'on voit, une Méthode bien simple pour résoudre ces Problêmes.

REMARQUE III.

97. Si au lieu de ſuppoſer le Corps *P* animé d'une force accélératrice φ, on ſuppoſoit qu'il fut contraint de ſe mouvoir dans la rainure Courbe *APp* avec une viteſſe dont la Loi fut donnée, le Problême pourroit toujours ſe réſoudre de la même façon. Il ne ſeroit queſtion que de déterminer la force φ. *Voyez l'article* 82. *ci-deſſus.*

PROBLÊME V.

98. *Un fil* CmM *fixe en* C, (Fig. 31) *& chargé de deux poids* m, M, *étant infiniment peu éloigné de la verticale* CO, *trouver la durée des oſcillations de ce fil.*

Soit *mu* l'Arc parcouru pendant le premier inſtant par le Corps *m*, & *MV* l'Arc décrit dans le même tems par le Corps *M*. On peut regarder le Corps *M* comme ayant à la fois deux Mouvemens, dont l'un *MV* eſt égal & paralléle au Mouvement *mu* du Corps *m*, & l'autre *Vv* eſt un Mouvement circulaire autour du centre *m* ou *u*. Nous décompoſerons d'abord l'effort abſolu de la peſanteur du Corps *m* ſuivant *mQ*, en deux autres, dont l'un ſoit capable de faire parcourir au Corps *m* la ligne *mu* dans le premier inſtant, & l'autre ſoit dirigé ſuivant la ligne *mR* dont la poſition eſt inconnue. Ce dernier effort doit être détruit, puiſque (*hyp.*) le Corps *m* ne peut ſe mouvoir que ſuivant *mu*. Nous décompoſerons de même l'effort abſolu de la peſanteur du Corps *M* ſuivant ML, en deux autres, dont l'un fasse parcourir au Corps M la ligne MV, & l'autre MN puisse se décomposer de nouveau en deux autres, dont l'un fasse parcourir au Corps M la ligne Vv, l'autre soit entiérement détruit, ou ce qui revient au même, fasse équilibre avec l'effort suivant mR qui doit s'anéantir aussi. Or il est nécessaire pour cela 1°. que l'effort du Corps M qui doit être détruit, soit dirigé suivant MP dans la direction de mM prolongée, 2°. que cet effort soit à l'effort suivant mR, comme l'angle infiniment petit SmR (fait par mR & Cm prolongée), est à l'angle MmS, parce qu'il faut pour l'équilibre que la force résultante du concours de ces deux efforts soit dirigée suivant mS. Cela posé.

Soit $Cm = l$, p la pesanteur du Corps m, P celle du Corps M, $Mm = L$, $mK = x$, $MQ = y$, φ la force accélératrice suivant mu; on aura 1°. la force φ à la pesanteur p, comme l'angle RmQ est au Sinus de l'angle droit Rmu. Donc nommant le Sinus total 1, on aura l'angle $RmQ = \frac{\varphi}{p}$ 2°. on trouvera de même l'angle $NML = \frac{\varphi}{P}$. donc l'angle $PMN = \frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P}$, & la force accélératrice suivant $uv = P\left(\frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P}\right)$. mais l'effort du Corps M suivant MP, qui ne différe qu'infiniment peu de son effort suivant ML, & qui peut par conséquent s'exprimer par $M \times P$, doit être à l'effort du Corps m suivant

ſuivant mR ($m \times p$) :: l'angle RmS ou $\frac{x}{l} - \frac{\phi}{p}$ eſt à l'angle MmS ou $\frac{y}{L} - \frac{x}{l}$. donc $m.\phi = \frac{mpx}{l} - M.P \times (\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$, & par conſéquent $\phi = \frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}(\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$ & l'effort ſuivant Vv, ſera $\frac{Py}{L} - \frac{px}{l} + \frac{M.P}{m}(\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$.

Si on nomme préſentement t le tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, on aura ces deux Equations (M) $-ddx = [\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}(\frac{y}{L} - \frac{x}{l})]dt^2$.

& $-ddy = [\frac{yP}{L} . \frac{(M+m)}{m} - \frac{x}{l} . (p + \frac{M.P}{m})]dt^2$ (N).

Ce ſont ces deux Equations qui ſerviront à déterminer le Mouvement de chaque Corps.

COROL. I.

99. Si on ſuppoſe que les forces initiales ſuivant mu & Vv ſoient entr'elles, comme mK à MQ ; c'eſt-à-dire, ſi (O) $\frac{px}{l} + \frac{MPx}{lm} - \frac{MPy}{Lm} : \frac{yP}{L}(\frac{M+m}{m}) - \frac{x}{l}(p + \frac{M.P}{m}) :: x : y$. Je dis que les Corps M, m, arriveront dans le même tems à la verticale CO. Car il faut, pour cela, que les Arcs MQ, mK ſoient parcourus dans le même tems: or ſi l'analogie précedente a lieu, les petites parties dont les Arcs mK, MQ diminueront au premier inſtant &

dans les ſuivans, ſeront entr'elles comme ces Arcs, & les forces accélératrices ſeront toujours entr'elles comme les Arcs qui reſteront à parcourir juſqu'au point de repos. Donc &c.

L'analogie *O* étant réduite en Equation donne

$$\frac{pxy}{l} + \frac{MPxy}{lm} - \frac{MPyy}{Lm} = \frac{yxP}{L} \cdot \left(\frac{M+m}{m}\right) - \frac{xx}{l} \cdot \left(p + \frac{M \cdot P}{m}\right)$$

ou $\frac{y}{x} + \frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l} = \pm \surd\left[\frac{pLm}{MPl} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M+m}{2m} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l}\right)^2\right]$

& $\frac{y+x}{x} = \frac{-m+M}{2M} + \frac{pLm}{2PMl} + \frac{L}{2l} \pm \surd\left[\frac{pLm}{MPl} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M+m}{2m} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l}\right)^2\right]$

COROL. II.

100. Si $P = p$, c. à. d. ſi les Corps M & m ſont de même gravité ſpécifique, on aura $\frac{y+x}{x} = \frac{Ml - ml + ML + mL}{2Ml} \pm +$ $\frac{\surd[4MmLl + 4MMLl + (Ml + ml - ML - mL)^2]}{2Ml}$: la quantité qui eſt ſous le Signe radical, ſe peut changer en $\surd[4MmLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]$, & alors le rapport de $y + x$ à x, ſera préciſément le même qui a été donné pour ce cas ſeulement, par M. *Dan. Bern. Mém. de Peterſb, to, 6. p,* 111. dont cet Auteur a donné enſuite la démonſtration dans le To. 7. des mêmes Mémoires. M. *Euler* a donné auſſi dans le To. 8. une ſolution de ce même Problême. Comme il eſt curieux, & qu'il peut ſervir à en réſoudre pluſieurs autres ſembla-

bles, j'ai cru devoir montrer comment mon Principe s'y applique.

COROL. III.

101. Si la ſituation du fil CMm n'eſt pas celle que ce fil doit avoir, pour que les Corps m, M arrivent en même tems à la verticale; en ce cas, il faut recourir à l'intégration des Equations N & M de *l'art.* 98. pour trouver le Mouvement des Corps M & m. Je ſuppoſerai d'abord, pour rendre les calculs les plus ſimples qu'il ſera poſſible, nonſeulement $P = p$, mais encore $M = m$ & $l = L$; de plus, pour rendre les Equations M & N homogenes, je ſuppoſerai que T ſoit le tems pendant lequel la force accélératrice p feroit parcourir au Corps m ou M un eſpace $= l$; de cette maniére les Equations M & N ſeront changées en celle-ci:

$$(P) - ddx = (2x - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2}, \& (Q) - ddy = (2y - 2x) \frac{2dt^2}{T^2}$$

pour intégrer ces Equations, je multiplie la premiere par α, & la ſeconde par ν (α & ν étant deux nombres indéterminés) & enſuite je les ajoûte enſemble, ce qui donne

$$(R) - \alpha ddx - \nu ddy = [(2\alpha - 2\nu) \cdot x (-\alpha + 2\nu) \cdot y] \cdot \frac{2dt^2}{T^2}.$$

Je fais enſorte, que $(2\alpha - 2\nu) \cdot x (-\alpha + 2\nu) \cdot y$ ſoit un multiple de $-\alpha x - \nu y$, ce qui donne $\frac{2\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{2\nu - \alpha}{\nu}$, & $\alpha = \pm \nu\sqrt{2}$. Donc

$$- ddx\sqrt{2} - ddy [(2\sqrt{2} - 2) \cdot x + (2 - \sqrt{2}) \cdot y] \cdot \frac{2dt^2}{T^2}.$$

ſoit $x\sqrt{2}+y=u$, & l'on aura $-ddu=u\sqrt{2}.\frac{2dt^2}{T^2}$,

dont l'intégrale eſt $\frac{A^2dt^2}{T^2}-du^2=2\sqrt{2}.\frac{u^2dt^2}{T^2}$, donc

$dt=\frac{-Tdu}{\sqrt{[A^2-2\sqrt{2}.u^2]}}$ (je mets $-Tdu$, parce que u

étant $=$ à $x\sqrt{2}+y$, & x, y, diminuant lorſque t croît, il eſt néceſſaire que u diminue auſſi, lorſque t croît). De plus, la nature du Problême & l'inſpection des Equations P & Q, font voir que lorſque $t=o$, on a $dx=o$,

$dy=o$, & par conſéquent $du=o$. Donc $\frac{A^2}{2\sqrt{2}}$ eſt égal à ce

que devient u, quand $t=o$: ſoit $x=X$, & $y=Y$ au commencement du Mouvement, c'eſt-à-dire quand $t=o$;

& l'on aura $\frac{A^2}{2\sqrt{2}}=(X\sqrt{2}+Y)^2$. Préſentement, ſi on

met pour y ſa valeur $u-x\sqrt{2}$ dans l'Equation P, on

aura $-ddx=[(2+\sqrt{2}).x-u]\frac{2dt^2}{T^2}$: dans cette Equa-

tion, on obſervera que la quantité u, eſt déja conſtrui-

te en t par l'Equation $dt=-\frac{Tdu}{\sqrt{[A^2-2\sqrt{2}.u^2]}}$: je fais

$x=\frac{zs}{l}$, z & s étant deux variables indéterminées, & j'ai

$$\frac{-zdds-2dsdz-sddz}{l}=(2+\sqrt{2}).\frac{zs}{l}.\frac{2dt^2}{T^2}-\frac{2udt^2}{T^2};$$

Or à cauſe des deux indéterminées x & s, dont l'une peut être tout ce qu'on voudra, on peut ſuppoſer que les deux

termes $-zdds$ & $(2+\sqrt{2}).zs.\frac{2dt^2}{T^2}$ ſoient égaux;

ce qui donne $\frac{B^2 dt^2}{T^2} - ds^2 = (2 + \sqrt{2}) . \frac{2 s^2 dt^2}{T^2}$. Donc $dt = - \frac{T ds}{\sqrt{[B^2 - (2 + \sqrt{2}) . 2 s^2]}}$; il ne nous reste plus que l'Equation $- \frac{2 ds dz - s ddz}{l} = - \frac{2 u dt^2}{T^2}$, dont l'intégrale est $\frac{s^2 dz}{l} = \int \frac{2 u s dt^2}{T^2}$.

On remarquera enfin, que puisque $t = o$ rend $X = x$, & dx ou $\frac{z ds + s dz}{l} = o$, on peut supposer $ds = o$, & $dz = o$, quand $t = o$; ce qui donne $\frac{B^2}{2 . (2 + \sqrt{2})} = s^2$ & $\frac{zs}{l}$ ou $x = X$. Donc $z = \frac{lX}{s}$, quand $t = o$. De toutes ces Equations, on tire la construction suivante.

Du centre C (Fig. 32) & d'un rayon $CA = (X\sqrt{2} + Y)$. on décrira un Cercle AF. Ensuite ayant pris une ligne quelconque CK pour exprimer T, on fera $CB = \frac{T}{\sqrt{[2\sqrt{2}]}}$, & on décrira le Cercle BE du Centre C. Si on prend BE à CK comme une partie de tems quelconque t écoulée depuis le commencement du Mouvement, est au tems donné T, & qu'on tire EFC, & FG perpendiculaire à CA; je dis que CG sera la valeur de u qui répondra à BE (t). Cela est clair par l'Equation $dt = - \frac{T du}{\sqrt{[A^2 - 2\sqrt{2} . u^2]}}$. dans laquelle, comme on a vu, $\frac{A^2}{2\sqrt{2}} = (X\sqrt{2} + Y)^2$.

Pour construire l'Equation $dt = \frac{-Tds}{\surd[B^2 - 2.(2+\surd 2).s^2]}$ dans laquelle la constante B^2 peut être prise pour ce qu'on voudra, étant seulement égale à $2s^2.(2+\surd 2)$ lorsque $t=0$, on prendra $CD = \frac{T}{\surd[2.(2+\surd 2)]}$, & on supposera $\frac{B^2}{2.(2+\surd 2)} = CA^2$. & décrivant du rayon CD le Cercle DLO, sur lequel on prendra l'Arc $DL = BE$, on aura la correspondante $CZ = s$. Enfin on décrira une Courbe, dont les abscisses étant t, les ordonnées soient $\frac{us}{T}$ & une autre Courbe dont les ordonnées soient égales aux aires $\int \frac{usdt}{T}$ de la premiére, multipliées par $\frac{l}{ss}$, enfin une troisiéme Courbe, dont les ordonnées soient égales aux aires correspondantes des parties de la précedente, divisées par T, & on aura $z = \frac{lX}{CA}$ + aux ordonnées correspondantes de cette derniére Courbe.

De cette maniére, on aura pour un tems t quelconque les valeurs de u, z, s. Donc aura celles de x & de y. Ce *Q. F. Trouver.*

REMARQUE I.

102. Si l'on cherche dans le cas que nous venons d'éxaminer au Corol. précedent, c'est-à-dire lorsque $P=p$, $M=m$ & $L=l$, quel doit être le rapport des lignes X, Y, pour que les Corps m, M arrivent dans le même tems

à la verticale, on trouvera (*art.* 99) $2X - Y : 2Y - 2X :: X : Y$ donc $YY = 2XX$ & $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2}$, la même valeur qu'on a trouvée pour $\frac{\alpha}{\nu}$. En effet, pour peu qu'on fasse d'attention à la nature du Problême, on verra que quand il y a deux Corps m, M, les deux valeurs de $\frac{\alpha}{\nu}$ doivent être les mêmes, que celles que doit avoir $\frac{Y}{X}$, pour que les points m, M, arrivent tous deux en même tems à la verticale. Car lorsque les deux Corps arrivent en même tems à la verticale, le rapport de x à y, de dx à dy, & de ddx à ddy est toujours constant & égal au rapport de X à Y. Or supposons, dans ce cas, les indéterminées α, ν telles, que $\frac{\alpha}{\nu} = -\frac{Y}{X}$; il est clair que dans l'Equation $-\alpha ddx - \nu ddy = ([2\alpha - 2\nu].x[-\alpha + 2\nu].y)\frac{2dt^2}{T^2}$ le premier membre sera zero; & par conséquent le second devra l'être aussi, ce qui arrivera, si l'on a $\frac{2\alpha - 2\nu}{2\nu - \alpha} = -\frac{y}{x} = -\frac{Y}{X} = \frac{\alpha}{\nu}$, ou bien si on a à la fois $2\alpha - 2\nu = 0$ & $2\nu - \alpha = 0$. Or ce dernier cas renfermant contradiction, il s'ensuit que l'Equation entre α & ν lorsque $\frac{\alpha}{\nu} = -\frac{Y}{X}$, est $\frac{2\alpha - 2\nu}{2\nu - \alpha} = \frac{\alpha}{\nu}$ la même précisement qu'on a trouvée ci-dessus en général, lorsque le rapport de Y à X est quelconque. Donc dans cette derniére Equation, la valeur négative de $\frac{x}{y}$ doit être $=$ à la positive de l'Equation qui donne le rapport de Y à X, & la positive à la négative.

Remarque II.

103. Il est évident que le raisonnement de l'article précedent peut s'appliquer aux cas où l'on n'a ni $P = p$, ni $M = m$, ni $L = l$; & en effet, si l'on veut prendre la peine de faire le calcul, on verra que l'Equation étant ordonnée par rapport à $\frac{x}{y}$, elle ne différera que par le signe du second terme de l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{Y}{X}$.

Car en général les Equations M, N de *l'article 98*, peuvent être représentées par $ddx = (ax + by) . dt^2$ & $ddy = (cx + ey) . dt^2$. Or pour que les Corps arrivent en même tems à la verticale, il faut que $ax + by : cx + ey :: x : y$, & pour avoir la valeur de $\frac{x}{y}$, il faut que $\frac{ax + cy}{x} = \frac{bx + ey}{y}$. Les deux Equations ordonnées, l'une par rapport à $\frac{y}{x}$, l'autre par rapport à $\frac{x}{y}$, ne diffèrent que par le signe du second terme.

Remarque III.

104. Au reste, je n'ai consideré dans la solution du Problême

Problême précedent, le Mouvement du poids M, comme composé de deux Mouvemens, dont l'un MV lui est commun avec le poids m, l'autre Vv est un Mouvement de rotation autour de m comme centre, que pour préparer le Lecteur à la solution de quelques Problêmes qui suivront, & que cette considération rend beaucoup plus aisés à résoudre. Car on auroit pû décomposer d'abord l'action de la pesanteur M suivant ML, en deux autres, dont l'une produisît le Mouvement Mv du Corps M, l'autre suivant MP, fut détruite. De cette maniére on auroit eu la force accélératrice suivant $Mv =$ à $p \times \text{Sin.}\ LMP = \frac{py}{L}$; l'angle $SmR = \frac{SmM \times P.M}{p.m}$ $= (\frac{y}{L} - \frac{x}{l}) \times \frac{P.M}{p.m}$; donc l'angle RmQ auroit été $= \frac{x}{l} - [(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}) \times \frac{P.M}{p.m}]$, & par conséquent la force accélératrice suivant mu égale au produit de p par cette derniére quantité. Ainsi comme x, est l'espace que cette derniére force accélératrice tend à faire parcourir au Corps m, & $x + y$ celui que la force accélératrice totale du Corps M, tend à lui faire décrire, on auroit eu $-ddx = [\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}(\frac{y}{L} - \frac{x}{l})]dt^2$ & $-ddx - ddy$ $= [\frac{Py}{L}]dt^2$. deux Equations, dont la premiére est la même que l'Equation M de *l'art.* 98, & dont l'autre n'est autre chose que les Equations M & N de ce même article

O

ajoûtées ensemble. Cette solution, par conséquent, revient au même que celle que nous avons donnée *art.* 98.

COROL. IV.

105. En général, si un fil $CMm\mu$ (Fig. 33) est chargé de tant de poids M, m, μ &c. qu'on voudra, infiniment peu éloignés de la verticale, on peut toujours déterminer la force accélératrice de chacun de ces Corps, par l'une des deux solutions données *art.* 98 & 104. pour le cas de deux Corps.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois Corps M, m, μ, dont les pesanteurs P, p, π suivant MA, ma, $\mu\alpha$; se décomposent chacune en deux autres, dont les unes soient les forces accélératrices des Corps M, m, μ suivant MV, mu, μv; les autres, dirigées suivant MB, mb, $\mu\alpha$ fassent équilibre, & que les fils CM, Mm, $m\mu$, soient prolongés suivant MR, mr, μZ; il est clair que les puissances suivant μZ, mb, qui doivent être censées égales aux poids des Corps μ, m, doivent se réduire à une puissance suivant mr, qui peut être regardée comme égale à leur somme; que de même la puissance suivant mr ou Mm, & la puissance suivant MB qui doit être censée égale au poids du Corps M, doivent se réduire à une puissance suivant MR. On aura donc la force accélératrice du Corps $\mu = \pi$. angl. $Z\mu\alpha$; celle du Corps $m = p$. [angl. rma — angl. $\frac{rm\mu \cdot \pi \cdot \mu}{p \cdot m}$]; celle du Corps $\mu = P$. [angl. RMA — angl. $\frac{RMm \times (p \cdot m + \pi \cdot \mu)}{P \cdot M}$].

En général il eſt viſible, que ſi pour ſimplifier le calcul, on ſuppoſe toutes les peſanteurs égales à une même quantité g qu'on prendra pour l'unité, & qu'on appelle p, q, r, s &c. les angles $MCO, mMR, \mu mr$, &c. & B, C, D, E &c. les maſſes à commencer de haut en bas, les forces accélératrices ſeront par ordre à commencer du Corps le plus bas:

$$p + q + r + s$$

$$p + q + r - \frac{sE}{D}$$

$$p + q - r . [\frac{E + D}{C}]$$

$$p - q . [\frac{E + D + C}{B}]$$

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli*, to. 7. des *Mém. de Peterſb.* p. 170.

COROL. V.

106. Suppoſons que le fil ne ſoit chargé que de trois Corps égaux entr'eux, dont x, y, & z, ſoient les diſtances à la verticale à commencer par le plus haut; & que les portions du fil interceptées entre ces Corps, ſoient égales: ſi on veut que ces Corps arrivent en même tems à la verticale, il faut faire $x : y :: p - 2q : p + q - r$; & $z : y :: p + q + r : p + q - r$. ou (mettant pour p, q, r, leurs proportionnelles $x, y - 2x, z - 2y + x$)

$$x : y :: 5x - 2y : 3y - 2x - z;$$

$$\& \ z : y :: z - y : 3y - 2x - z;$$

donc $(3y - 2x - z) \cdot z = (z - y) \cdot y$,
& $(3y - 2x - z) \cdot x = (3x - 2y + 2x) \cdot y$.

donc $z = -5y + \frac{2yy}{x} + 3y - 2x = \frac{2yy}{x} - 2y - 2x$,

& $y \cdot (\frac{2yy}{x} - 3y - 2x) = (-\frac{2yy}{x} + 5y)(\frac{2yy}{x} - 2y - 2x)$;

d'où l'on tire $\frac{2yy}{x} - 3y - 2x = -\frac{4y^3}{xx} + \frac{4yy}{x} + 4y$

$+ \frac{10y^2}{x} - 10y - 10x$: divisant le tout par x, & ordonnant l'Equation par rapport à $\frac{y}{x}$, on aura $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x}$

$+ 8 = 0$, ce qui est conforme à ce qu'a trouvé M. *Bernoulli*, *Mém. de Petersb. to. 6. p.* 112. où il nomme 1 ce que nous avons appellé x ici, & x, ce qui est ici $\frac{y}{x}$.

Remarque III.

107. En général, quel que soit le nombre des Corps & la distance des uns aux autres, si on veut qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, les distances du troisiéme & du quatriéme &c. à la verticale, se trouveront toujours par des Equations lineaires en $\frac{y}{x}$. De plus l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ sera d'un degré égal à l'exposant du nombre des Corps, & aura toutes ses racines réelles. Car il est visible que s'il y a

trois Corps par exemple, & qu'on ſuppoſe celui qui eſt le plus haut placé à une très-petite diſtance de la verticale, on pourra toujours trouver trois ſituations pour chacun des deux autres Corps, pour qu'ils arrivent à la verticale tous deux en même tems que le premier ; ſavoir, en les mettant, ou tous deux du même côté de la verticale que le premier, ce qui fait un cas ; ou l'un du même côté, & l'autre du côté oppoſé, ce qui fait deux cas. En général, la ſituation du premier Corps étant donnée, le ſecond Corps & les autres ont toujours autant de ſituations poſſibles, qu'il y a de Corps ; donc $\frac{y}{x}$ a toujours autant de valeurs réelles qu'il y a de Corps ; & ainſi l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ aura toujours toutes ſes racines réelles. Donc la diſtance infiniment petite du Corps ſupérieur à la verticale, étant donnée, chacun des autres Corps pourra avoir autant de ſituations différentes qu'il y a de Corps en tout.

COROL. VI.

108. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Corol. 5. ſi on veut avoir le Mouvement de chaque Corps en particulier, ſans s'embarraſſer qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, on fera les trois Equations

$$-ddx = (5x - 2y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (S)$$

$$-ddy=(3y-2x-z).\frac{2dt^2}{T^2}\ (T)$$

$$\&\ -ddz=(z-y).\frac{2dt^2}{T^2}\ (V)$$

Pour intégrer ces Equations, je multiplie la premiére par α, la feconde par ν, la troifiéme par μ, & je les ajoûte enfemble : j'aurai $-\alpha ddx - \nu ddy - \mu ddz$
$=[(5\alpha-2\nu).x(-2\alpha+3\nu-\mu).y(-\nu+\mu).z]\frac{2dt^2}{T^2}$;

je fais $\frac{5\alpha-2\nu}{\alpha}=\frac{-2\alpha+3\nu-\mu}{\nu}=\frac{\mu-\nu}{\mu}$,

ce qui donne

$$\mu=\frac{-2\alpha\alpha+3\alpha\nu-5\alpha\nu+2\nu\nu}{\alpha}=\frac{2\nu\nu}{\alpha}-2\nu-2\alpha$$

$$\&\ (5\alpha-2\nu).\left(\frac{2\nu\nu}{\alpha}-2\nu-2\alpha\right)=\left(\frac{2\nu\nu}{\alpha}-3\nu-2\alpha\right).\alpha;$$

d'où l'on tire l'Equation $\frac{8\alpha^3}{\nu^3}+\frac{3\alpha^2}{\nu^2}-\frac{12\alpha}{\nu}+4=0$.

Ayant trouvé la valeur de $\frac{\alpha}{\nu}$ en réfolvant cette derniére Equation, on arrivera en faifant $\alpha x+\nu y+\mu z=u$ à une Equation de cette forme $-ddu=\frac{(5\alpha-2\nu)\,2u\,dt^2}{\alpha T^2}$ (X) qui peut s'intégrer aifément, & d'où l'on tirera au moins par une conftruction la valeur de u en t, que j'appellerai θ. On aura enfuite $-ddx=(5x-2y).\frac{2dt^2}{T^2}$ (Y) & $-ddy=(3y-2x-\frac{\theta+\alpha x+\nu y}{\mu}.\frac{2dt^2}{T^2}$ (Z).

On multipliera la premiére de ces Equations par l'indéterminée π, la seconde par l'indéterminée ρ, & on les ajoûtera ensemble, pour avoir $-\pi ddx - \rho ddy$

$$= [(5\pi - 2\rho + \frac{\alpha\rho}{\mu}) . x (-2\pi + 3\rho + \frac{\gamma\rho}{\mu}) . y - \frac{\theta\rho}{\mu}] . \frac{2dt^2}{T^2};$$

on supposera $5\pi - 2\rho + \frac{\alpha\rho}{\mu} : \pi = -2\pi + 3\rho + \frac{\gamma\rho}{\mu} : \rho$ afin de pouvoir en faisant $-\pi x - \rho y = k$ réduire l'Equation à cette forme $-ddk = akdt^2 + b\theta dt^2$, que nous avons appris à intégrer ci-dessus.

On pourroit encore se servir d'une autre Méthode, en opérant sur les trois Equations X, Y, Z, comme on a operé sur les Equations S, T, V: on réduiroit ainsi les trois Equations X, Y, Z, à trois Equations de la même forme que l'Equation X.

Au reste, les Méthodes que nous proposons ici non-seulement sont générales pour construire ces sortes d'Equations, mais peuvent encore avoir plusieurs autres usages dont ce n'est pas ici le lieu de parler.

SCOLIE.

109. Il n'y auroit qu'une seule chose qui pût faire de la difficulté dans la construction des Equations differentielles dont il s'agit; ce seroit, s'il arrivoit que les Equations ordonnées par rapport à $\frac{\pi}{\rho}$, $\frac{\pi}{\rho}$ eussent toutes leurs racines imaginaires. Mais sans nous arrêter à chercher ici ce qu'il faudroit faire alors pour rendre la construc-

tion possible, nous nous contenterons de démontrer que ces Equations ont toujours dans le cas dont il s'agit ici au moins une de leurs racines réelle, ce qu'on peut prouver en cette sorte.

Soient x, y, s, u, &c. les distances respectives de chaque Corps à la verticale passant par le point fixe. Les Equations pour trouver le Mouvement de ces Corps, peuvent être en général représentées par

$$ddx = [ax + by].dt^2.$$

$$ddy = [cy + ex + fs].dt^2$$

$$dds = [hs + ly + gu].dt^2$$

$$ddu = [mu + ns].dt^2.$$

&c. &c.

Multipliant la premiére de ces Equations par α, la seconde par ν, la troisiéme par μ, la quatriéme par λ, &c. & les ajoûtant ensemble, puis faisant ensorte que le second membre soit un multiple de $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. on aura

$$\frac{a\alpha + c\nu}{\alpha} = \frac{\alpha b + c\nu + l\mu}{\nu} = \frac{f\nu + h\mu + n\lambda}{\mu} = \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} = \&c.$$

En général, si le nombre des Corps est $= n$, on aura $n - 1$ de ces sortes d'Equations; on tirera des $n - 2$ premiéres les valeurs de μ, λ, &c. en $\frac{\alpha}{\nu}$; toutes ces valeurs seront toujours données par des Equations lineaires: & substituant ces valeurs dans la $n - 2^e$ Equation, on on formera une Equation du degré n, ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$; d'où il s'ensuit, que si $\frac{\alpha}{\nu}$ a une valeur réelle dans cette Equation, toutes les autres quantités μ, λ, &c. auront aussi chacune une valeur réelle.

Or 1°. si le nombre des Corps n est impair, l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$ sera d'un degré impair, & aura au moins une racine réelle, & par conséquent $\frac{\alpha}{\nu}$, μ, λ seront aussi des quantités réelles.

2°. Si le nombre des Corps n est pair, il faut prouver que les valeurs de μ, λ, &c. tirées des $n - 2$ premiéres Equations, étant substituées dans la $n - 1^{e}$, on aura une Equation en $\frac{\alpha}{\nu}$ dont au moins une des racines sera réelle. Or imaginons que les distances x, y, s, u, &c. des Corps à la verticale, que nous avons supposées quelconques, soient telles, que ces Corps arrivent en même tems à la verticale; il est certain en premier lieu (*art.* 107.) que $\frac{y}{x}$, s, u, &c. seront des quantités réelles. En restant dans la même supposition, substituons dans la quantité $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. les valeurs de μ, λ &c. en $\frac{\alpha}{\nu}$, & imaginons qu'après cette substitution on fasse la quantité $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= 0$, on aura une Equation dans laquelle il n'y aura que $\frac{\alpha}{\nu}$ d'inconnue; & qui étant résolue, donnera pour $\frac{\alpha}{\nu}$ une valeur telle, que $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= 0$. Or cette Equation sera toujours du degré $n - 1$, & par conséquent ici d'un degré impair; donc elle aura dans le cas présent au moins une racine réelle, & par conséquent il y a toujours, quand n est un nombre pair, une valeur réelle de $\frac{\alpha}{\nu}$ propre à rendre la quantité $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= 0$, lorsque x, y, s, u, &c. sont les distances où les Corps doivent être de la verticale pour y arriver tous en même tems.

Je vais prouver maintenant, que toutes les racines de l'Equation $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= 0$. ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$, & parmi lesquelles il y en a, comme nous venons de voir, au moins une réelle, sont aussi racines de l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$; d'où il s'ensuivra que cette derniére Equation aura au moins une racine réelle, ce que nous nous sommes proposés de prouver.

Quelles que soient les valeurs de x, y, s, u, &c. soit que les Corps arrivent en même tems à la verticale, ou non, on a toujours l'Equation $\alpha ddx + \nu ddy + \mu dds + \lambda ddu$ &c. $= (\frac{\alpha a + e\nu}{\alpha} . \alpha x + \frac{c\nu + \alpha b + l\mu}{\nu} . \nu y + \frac{f\nu + b\mu + n\lambda}{\mu} . \mu g + \frac{g\mu + m\lambda}{\nu} \lambda u$ &c.$) dt^2$,

ou (à cause que $\frac{\alpha a + e\nu}{\alpha} = \frac{c\nu + \alpha b + l\mu}{\nu} = \frac{f\nu + h\mu + n\lambda}{\mu}$,

puiſque les valeurs de μ, λ &c. en $\frac{\alpha}{\nu}$ ſont ſuppoſées données par ces Equations) $\alpha ddx + \nu ddy +$ &c. $= [\frac{(\alpha a + e\nu)}{\alpha} . (\alpha x + \nu y + \mu s) + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} . \lambda u] dt^2$.
Mais ſi on ſuppoſe les diſtances x, y, s, u, telles, que les Corps arrivent tous en même tems à la verticale; & de plus, que $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u = o$, on aura $\alpha ddx + \nu ddy +$ &c. $= o$, c'eſt-à-dire que le premier membre de l'égalité précedente ſera $= o$, & par conſéquent, que le ſecond doit l'être auſſi. Or (à cauſe de $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u = o$) ce ſecond membre eſt

$$(\frac{-\alpha a - e\nu}{\alpha} + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda}) \lambda u,$$

$$\text{ou } (\frac{-\alpha a\lambda - e\nu\lambda}{\alpha} + g\mu + m\lambda) u.$$

Donc $\frac{-\alpha a\lambda - e\nu\lambda}{\alpha} + g\mu + m\lambda = o$, donc toute valeur de $\frac{\alpha}{\nu}$ propre à rendre $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= o$. rendra auſſi la quantité $\frac{-\alpha a - e\nu}{\alpha} + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} = o$. Mais cette derniére quantité, ſi on y ſubſtitue pour μ, λ &c. leurs valeurs en α & ν, deviendra l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$. Donc l'Equation $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u$ &c. $= o$ à toutes ſes racines communes avec l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$; *ce qui reſtoit à démontrer.*

On démontrera par une Méthode semblable, que l'Equation générale ordonnée par rapport à $\frac{x}{\rho}$ aura au moins une racine réelle. Car en faisant $\alpha x + \nu y + \mu s$ &c. $= \theta$ comme dans *l'art.* 108. on observera que $\theta = o$, à cause de $\alpha x + \nu y + \mu s$ &c. $= o$ (*hyp.*), & la démonstration sera, moyennant cette remarque, précisément de la même nature que la précedente.

COROL. VII.

110. Soit une Courbe chargée de poids infiniment petits & égaux, placés à des distances infiniment petites les uns des autres, & tous infiniment peu éloignés de la verticale; soient x les abscisses, y les ordonnées infiniment petites de cette Courbe, s les Arcs qui différent infiniment peu des x correspondantes; enfin l la longueur du fil, il suit de l'*art.* 105. que la force accélératrice de chaque petit poids, est comme la somme des Sinus des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport des poids inférieurs à ce poids; donc cette force est pour chaque point $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s) \cdot ddy}{ds^2}$, ce que M. *Daniel Bernoulli* a donné dans le tom. 7. des *Mém. de Petersb. pag.* 170.

M. *Daniel Bernoulli* a tiré delà l'Equation que devroit avoir la Courbe, pour que toutes ses parties arrivassent en même tems à la verticale. *Voy. ibid. p.* 171.

Si la Courbe n'a pas cette Equation, alors elle changera d'Equation d'un instant à l'autre, & la valeur générale d'une ordonnée y, ne pourra être exprimée que par une fonction de l'Arc s ou de l'abscisse x correspondante, & du tems t écoulé depuis le commencement du Mouvement; cette fonction, lorsque $t = o$ deviendra la valeur de y en s donnée par l'Equation de la premiére Courbe. Soit donc en général $y = {}^*\varphi(t.s)$, $dy = pdt + qds$, d dy la différence de dy, en regardant s comme constante, ddy sa différence en prenant t constante, on a $\mathrm{dd}y = [\frac{dy}{ds} - (l-s).\frac{ddy}{ds^2}].dt^2$ ou $\frac{dp}{dt} = q - (l-s).\frac{dq}{ds}$; on observera que dp doit être prise en ne faisant varier que t, & dq en ne faisant varier que s. Soit $dp = \alpha dt + vds$, $dq = bdt + mds$; à cause que $pdt + qds$ est une différentielle complette, il faut que $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire $b = v$. De plus, l'Equation $\frac{dp}{dt} = q - \frac{(l-s).dq}{ds}$ donne $\alpha = q - (l-s).m$, donc $mds = \frac{qds - \alpha ds}{l-s}$: ajoûtant de part & d'autre bdt ou vdt, on aura $mds + bdt$ ou $dq = \frac{qds - \alpha ds}{l-s} + vdt$. Donc $dq.(l-s) - qds = vdt.(l-s) - \alpha ds$, & $q.(l-s) = \int vdt.(l-s) - \alpha ds$. Cette Equation doit avoir lieu, en cas que toutes les Courbes variables dont il s'agit, puissent être renfermées dans l'Equation générale $y = \varphi(t.s)$.

* Cette quantité $\varphi(t.s)$ exprime en général une fonction de t & de s.

LEMME VIII.

111. *Soit un Corps* CRM (Fig. 34) *de figure quelconque, dont le centre de gravité soit* G; *que toutes les parties* V *de ce Corps soient animés par des forces* VM *dont les directions soient perpendiculaires à la ligne* VC, *menée des points* V *à un point fixe* C *pris à volonté dans le Corps, & que ces forces soient entr'elles comme les distances* VC; *je dis que la direction de la force résultante, sera une ligne* KL *perpendiculaire à la droite* CG *menée par* G, *& par le point donné* C.

Car décomposant chaque force *VM* en deux; l'une suivant *VN* paralléle à *CV*, l'autre suivant *VP*, perpendiculaire à *CV*; il est aisé de voir que les forces suivant *VN* seront comme les distances *CQ* de ces forces à la ligne *CG*, qu'ainsi les sommes de ces forces seront égales à la somme des produits de chaque particule par sa distance à la ligne *CG*. Mais comme *CG* passe par le centre de gravité *G*, cette somme est $= o$. donc la force résultante des forces suivant *VN* est $= o$. donc la direction & la valeur de la force que nous cherchons, sera la même que celle qui résulte des seules forces suivant *VP* perpendiculaires à *CG*. Donc la direction de cette force ne peut manquer d'être une ligne *OKL* perpendiculaire à *CG*.

A l'égard de la valeur de la force suivant *OL*, elle est égale à la somme des forces suivant *VP* multipliées par les petites masses correspondantes *V*, & comme les forces VP sont entr'elles comme VQ, & que $\int V.VQ$ est égal à CG multiplié par la masse MSC, par la propriété du centre de gravité; il s'ensuit, que si on appelle φ la force accélératice du point G, la force suivant OL sera $= \varphi . MSC$.

La distance de la ligne OL à $C = \frac{\int V . \varphi . \frac{VC}{CG} \times VC}{\varphi . MSC}$ $= \frac{\int V . VC^2}{CG . MSC}$.

COROLLAIRE.

112. On voit par-là que la position de la ligne OKL est toujours donnée, quelle que soit φ.

PROBLÊME VI.

113. *Un Corps* CRV (Fig. 35) *de figure quelconque, dont* G *est le centre de gravité, étant suspendu à un fil* AC, *&* *les lignes* AC, CG *étant infiniment peu écartées de la verticale, trouver la vitesse des points* C *&* G *pour un tems donné* t.

Les parties du Corps CRV ont chacune un Mouvement égal & paralléle à celui du point G, & elles tournent en même tems autour de ce point C avec des vitesses qui sont entr'elles comme les distances à ce point. Soit p la pesanteur absolue d'une particule quelconque V suivant la verticale VQ, & soit cet effort décomposé pour chaque particule en deux autres, dont l'un suivant Vu

soit égal & paralléle à la force accélératrice du point C suivant CP, & l'autre soit dirigé suivant Vn. Cet effort Vn dont on ne connoît point encore la direction, sera égal & de même direction pour toutes les particules : c'est pourquoi on peut regarder tous les efforts Vn comme réunis au centre G, & agissant suivant GN paralléle à Vn. Il faut, de plus, décomposer cet effort Vn pour chaque particule en deux autres, dont l'un soit l'effort nécessaire pour faire tourner la particule V autour de C; & l'autre soit détruit. J'appelle ce dernier effort s, & puisque tous les efforts s doivent être détruits, il faut que la force qui en résulte, soit dans la direction de AC.

On a déja trouvé que GN paralléle à Vn, & dont la position est inconnue, est la direction de la force résultante des forces Vn; on trouvera (*art.* 112.) la position de la ligne KL, direction de la force résultante des efforts des particules V pour tourner autour de C, quoiqu'on ne connoisse pas encore la valeur de cette force. La direction de la force résultante des efforts suivant GN & KL, doit nécessairement passer par le point de concours L des lignes GL & KL, & de plus elle doit être dans AC prolongée. Donc le point L est dans AC prolongée : donc la ligne GN doit passer par le point où se rencontrent les lignes KL donnée de position, & AC prolongée ; & CL sera la direction de la force résultante des forces s.

Soit π la force de C suivant CP, laquelle est commune à toutes les particules, φ celle de G pour tourner

autour

autour de C, on menera Gi parallèle à CP, & GM à AP, & on nommera AC, l, CG, a, GK, b, m la masse du Corps, CP, x, l'angle fait par CG & par la verticale, $\frac{y}{a}$: GK & GL pourront être censées égales, & l'on aura l'angle $GLM = \frac{GCL \cdot CG}{GK} = (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \cdot \frac{a}{b}$, & l'angle $LGM = \frac{x}{l} - (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}$; mais la force $\pi = p \cdot LGM = p\,[\frac{x}{l} - (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}]$; & la force suivant KL ($\varphi . m$) doit être à la force suivant GL ($p . m$) :: l'angle GLM au Sinus total. Donc $\varphi = p\,(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}$; on a donc $-ddx = [x - (\frac{yl}{a} - x) \frac{a}{b}]\,\frac{2dt^2}{T^2}$, & $-ddy = (\frac{yl}{b} - \frac{ax}{b}) \cdot \frac{2dt^2}{T^2}$; Equations qui s'intégreront par une Méthode pareille à celle dont on s'est déja servi pour des cas semblables, dans les *art.* 101. & 108.

COROLLAIRE.

114. Si on veut que les points C, G arrivent en même tems à la verticale, on fera $x : y :: \frac{x}{l} - \frac{y}{b} + \frac{ax}{bl} : \frac{y}{b} - \frac{ax}{bl}$;

$$\text{donc } \frac{xy}{b} - \frac{axx}{bl} = \frac{xy}{l} - \frac{yy}{b} + \frac{axy}{bl} :$$

$$\text{donc } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{l-b}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{l}{a} + \left(\frac{l-b}{2a} - \frac{1}{2}\right)^2\right]}\ ;$$

Si l est fort grande par rapport à a & à b, on a $x = \frac{yl}{a}$ & $x = -y$. La premiére de ces Equations, donne $\frac{x}{l} = \frac{y}{a}$; c'est-à-dire que si le fil est fort long, les lignes CG & AC doivent être à très-peu près dans la même droite, pour que les points C, G, arrivent en même tems à la verticale. La seconde donne les angles des lignes CG, AC avec la verticale, & du même côté, en raison inverse de AC à CG; c'est-à-dire, que pour que les points C, G, arrivent en même tems à la verticale, il faut par la premiére Equation, que CG & AC soient dans la même ligne droite, & par la seconde, que le centre G soit situé au premier instant dans la verticale AC, ou au moins fort proche de cette verticale.

§. II.

Des Corps qui vacillent sur des plans.

PROBLÊME VII.

115. *Soit une figure quelconque* CKO (Fig. 36) *tellement située sur un plan horizontal* MCS, *que la direction* GF *de son centre de gravité* G *ne passe pas par son point touchant* C, *on demande ce qui arrivera à cette figure.*

Cette figure ne peut avoir que deux Mouvemens; l'un de rotation autour du point touchant C qui change à chaque instant; l'autre, qui sera le même dans toutes les parties de la figure, pour glisser le long du plan vers M ou vers S : il faut donc déterminer d'abord, si ce dernier Mouvement se fait vers M ou vers S ; en second lieu, la valeur de la force qui le produit, & que j'appelle π ; en troisiéme lieu, la force du centre G pour tourner autour de C, & que je nomme φ ; enfin, si cette derniére force fait tourner G à droite ou à gauche.

Quelles que soient les forces φ, il est certain qu'on peut trouver la direction ZNO de la force qui en résulte, & que cette ligne NO sera perpendiculaire à CG prolongée. De plus, la force résultante des efforts absolus de chaque particule en vertu de sa pesanteur, sera dirigée suivant NGF, & sera $= p \, . \, m$ en appellant m la masse du Corps, & p la gravité absolue. De même la ligne KGR paralléle à MS, sera la direction de la force résultante de toutes les forces π, & cette force sera $\pi . m$. Or par notre Principe, il faut que la force suivant NF puisse se décomposer en trois, dont la premiére soit la force résultante du concours d'action des forces φ, la seconde la force résultante des forces π, & la troisiéme s'anéantisse. Cette troisiéme ne peut s'anéantir, que sa direction ne soit la ligne CD perpendiculaire au plan en C. Delà il est aisé de voir par la seule inspection de la figure, 1°. que NO & non pas NZ sera la direction de la force résultante des forces φ, & qu'ainsi la figure tournera de gauche à droite. 2°. Que la force suivant NG sera composée de la force suivant NO, & d'une force dont la direction NL passera par N & par l'intersection L des lignes CD, KR. 3°. Que la figure glissera de G vers K, non de *G* vers *R*. 4°. La force ſuivant *NV* étant donnée, & les lignes *NL*, *NO* données de poſition, la force ſuivant *NO* ſera donnée, & par conſéquent φ. De même la force ſuivant *NL* ſera donnée, & comme ſon rapport avec la force $\pi . m$. eſt celui de *LQ* à *QC*, la force π ſera donnée auſſi. Donc le Problême eſt réſolu.

SCOLIE I.

116. Au reſte, il eſt clair par *l'art.* 70. que le centre de gravité *G* deſcendra toujours dans une droite verticale : or delà il eſt très-aiſé ſans calcul, de trouver le Mouvement de la figure. Car par un point quelconque *E*, ſoit tirée la Tangente *EB* ſur laquelle on abaiſſera la perpendiculaire *GB* : lorſque *G* ſera à une diſtance du plan, égale à *GB*, le point *E* de la figure touchera le plan.

Quand le point *C* (Fig. 37) n'eſt pas un point touchant, par exemple, ſi la figure donnée eſt un triangle dont *C* ſoit un des angles, alors le centre étant en *V*, le point *C* ſera au point *E*, tel que $VE = GC$.

SCOLIE II.

117. Le Savant M. *Euler* dans le To. 7. des *Mém. de Peterſbourg*, s'eſt propoſé de réſoudre ce Problême, pour le cas ſeulement, où les vacillations du Corps ſur le plan doivent être infiniment petites ; ſa Méthode conſiſte à faire enſorte que les momens des forces des particules pour tourner autour de *C*, (Fig. 36) ſoient égaux aux momens de leur gravité abſolue par rapport au point *C*

considéré comme fixe, ce qui revient au même, que de décomposer la force suivant NF en deux, dont l'une soit la force suivant NO résultante des forces φ pour tourner autour de C, & l'autre passe par les points N & C, & soit anéantie.

Or la force suivant NC ne peut être anéantie, que quand NC est perpendiculaire à MCS, à moins qu'on ne suppose le plan raboteux, & d'une asperité assez grande, pour détruire l'effet de la force NC parallélement au plan. Ainsi pour que la solution de M. *Euler* ait lieu, il faut supposer que le plan n'est pas parfaitement uni. C'est aussi probablement ce que l'Auteur veut dire, par ces paroles : * *In hoc motu verò notandum est planum super quo fit, aliquantulùm asperum esse ponendùm, ne curvæ de loco suo inter vacillandum dimoveri queant, quòd eveniret, si planum maximè foret politum.* Apparemment que ces paroles, *ne de loco suo dimoveri queant*, signifient : *De peur que les Courbes, outre leur Mouvement autour du point touchant, n'ayent aussi un Mouvement pour glisser parallélement au plan.* Mais je ne sai ce qui a empêché que M. *Euler* n'eût égard à ce dernier Mouvement dans sa solution.

SCOLIE III.

118. Si la circonférence de la figure & la surface du plan sur lequel elle glisse ne sont pas parfaitement unies, voici comment on trouvera pour lors les forces p & π; on regardera le point C (Fig. 38) comme une petite

* Pag. 108.

éminence de masse donnée, & on supposera que l'on connoisse de quelle force accélératrice g ce petit Corpuscule devroit être animé suivant CS ou CM, pour que si cette force étoit tant soit peu augmentée, il fut capable de surmonter la résistance provenante des inégalités du plan. On décomposera d'abord la force absolue suivant NG en deux, dont l'une soit la force cherchée suivant NO, & l'autre agisse suivant la ligne inconnue NL. Cette derniére force doit être décomposée en deux, dont l'une suivant $LK = \pi . m$, & l'autre suivant LC regardée comme poussant le point C suivant CT, donne à ce point C un effort suivant $CS =$ à l'effort connu g.

Soient les données GP, a, GN, b, GO, c, CR, e, RG, f, & l'indéterminée $GL = y$, on aura la puissance suivant NL à la puissance suivant NG $(p \times m)$ :: le Sinus de l'angle GNO ou $\frac{GP}{GN}$ au Sinus de l'angle ZNL, ou $\frac{LZ}{NL}$. mais $\frac{GP}{GN} = \frac{a}{b}$, $LZ = GP \times \frac{OL}{OG} = \frac{a.(c+y)}{c}$, & $NL = \sqrt{[bb + yy]}$. Donc la force suivant $NL = \frac{p.m.NL.OG}{GN.OL}$: la force suivant LC est égale à la force suivant NL, multipliée par le rapport du Sinus de l'angle NLG ou $\frac{NG}{NL}$ au Sinus de l'angl. RLC ou $\frac{CR}{CL}$; enfin, la force suivant CS est égale à la force suivant LC, multipliée par $\frac{LR}{LC}$, d'où l'on tire $\frac{p.m.LR.GO}{OL.CR}$ ou $p.m.\frac{(y-f).c}{(c+y).e}$

pour la valeur de cette force ſuivant CS: ſoit μ la maſſe de la petite éminence C, il faut que $p.m.\frac{c.(y-f)}{e.(c+y)}=g.\mu$. d'où l'on tirera la valeur de y, & par conſéquent les valeurs abſolues des forces ſuivant NL, LK & NO, qui ſont celles que l'on cherche.

Mais il y a ici une choſe importante à obſerver, c'eſt que la force du point C ſuivant CS, doit être dans la même direction que celle ſuivant laquelle les parties du Corps CRS gliſſent parallélement au plan, d'où l'on voit que le point L ne peut être qu'entre R & A, A étant le point d'interſection des droites NC, RG, & l'expreſſion de la force ſuivant CM, ſera pour lors $\frac{p.m.(f-y).c}{e.(c+y)}=g.\mu$, d'où l'on tirera la valeur de y. Si cette valeur eſt plus grande que RA, la figure ne peut faire autre choſe que tourner autour du point C, qui dans chaque inſtant variera, & pourra être regardé comme fixe pendant un inſtant. Si on veut que la force néceſſaire pour faire mouvoir le point C malgré la réſiſtance du plan, ne ſoit pas donnée, mais ſeulement ſon rapport à la preſſion de ce point ſur le plan, on prendra RL à RC dans le rapport de la force du frottement à la force de la preſſion; & on aura par là le point L qui doit toujours être placé entre R & A; ſinon la figure n'aura aucun Mouvement parallélement au plan.

SCOLIE IV.

119. Dans le cas où le plan MCS (Fig. 38) eſt parfaitement uni, nous avons fait voir que le centre G deſcendoit dans une ligne droite verticale. Pour ſavoir la viteſſe avec laquelle il deſcend, il n'y a qu'à chercher la force qui le pouſſe à chaque inſtant ſuivant GF. Si on nomme GF, x, & φ la force accélératrice du point G pour tourner autour de C, m la maſſe du Corps, on aura 1°. la force ſuivant $NO = \varphi . m$ (*art.* 111.); de plus, GF étant donnée, on doit par la nature de la Courbe connoître GC, que j'appelle X, & GP que j'appelle z. La force ſuivant NR ſera à la force ſuivant NO :: le Sinus de l'angle PNG au Sinus de l'angle GNR. Donc la force ſuivant $NR = \frac{\varphi . m . GP}{GN} \times \frac{RN}{CF}$, & la force ſuivant $RL =$ la force ſuivant NR multipliée par $\frac{RG}{RN} = \frac{\varphi . m . GP}{GN} = \frac{\varphi . m : GF}{CG}$. Donc la force du point G ſuivant GL, eſt à la force pour tourner autour de $C :: GF : GC$, & ſa force ſuivant GF à la force $\varphi :: CF : CG$. Donc la force ſuivant $GF = \frac{\varphi . CF}{CG}$: mais la force ſuivant NG $(p . m)$ doit être à celle ſuivant NO $(\varphi . m)$ :: le Sinus de RNk au Sinus de RNG, c'eſt-à-dire : Rk à CF; donc $\varphi = \frac{p . CF}{Rk}$; donc la force ſuivant $GF = \frac{p . CF^2}{Rk . CG}$, & comme CF, CG, Rk ſont données en x, il eſt clair qu'on

qu'on aura la force initiale ſuivant GF exprimée en x.

On peut employer une Méthode analogue pour trouver la viteſſe dans les inſtans ſuivans : mais le plus court eſt de ſe ſervir du principe de la conſervation des forces vives. Soit u la viteſſe du centre G (Fig. 39) lorſqu'il a parcouru verticalement un eſpace $GV = t$, V la viteſſe avec laquelle les particules qui ſont à une diſtance donnée b du centre G, tournent autour de ce même centre, p la peſanteur, M la maſſe, a la ſomme des produits des particules par leurs diſtances à G, on aura $2pt = uu + \frac{VVa}{Mb^2}$; mais t eſt donnée en x, & V en u & x. Donc &c.

SCOLIE V.

120. Lorſque la figure ſe meut ſur un plan qui n'eſt pas uni, & que le frottement eſt ſuppoſé proportionnel à une partie donnée de la force comprimante, les lignes CR & CL (Fig. 38) ont entr'elles un rapport conſtant, par conſéquent le centre G ſe meut ſur la Courbe qu'il décrit, comme s'il étoit mû par une force dont la direction fit toujours avec le plan MS un angle conſtant.

§. III.

Des Corps qui agiſſent les uns ſur les autres par des fils, le long deſquels ils peuvent couler librement.

PROBLÊME VIII.

121. *Un fil* ANPM (Fig. 40) *de longueur donnée, étant arrêté fixement en* A *ſur un plan horizontal, & chargé*

de deux poids M, P, *dont l'un* M *ſoit attaché fixement au fil, & l'autre* P, *puiſſe couler le long du fil par le moyen d'un anneau, on demande le Mouvement de chacun de ces deux Corps, en ſuppoſant qu'ils ayent reçu l'un & l'autre une impulſion quelconque.*

Soient Pp, Mm, les deux lignes parcourues par les Corps P, M, dans un inſtant. Ayant décrit d'un rayon arbitraire conſtant AN, l'Arc Nn, & fait $n\mathrm{n} = nN$, la queſtion ſe réduit à trouver la grandeur & la poſition du côté pV qui ſuit immédiatement Pp, & la poſition VT de l'autre partie du fil. Je ſuppoſe que dans l'inſtant que le Corps P parcourt pV, il eut parcouru uniformément dans la direction de Pp la ligne $p\mathrm{p} = p\pi + \pi\mathrm{p} = Pp + \pi\mathrm{p}$, & que de même le Corps M eut parcouru uniformément $mo = m\mu + \mu o = Mm + \mu o$. Par notre Principe, il faut décompoſer les Mouvemens $p\mathrm{p}$, mo chacun en deux autres px, pV, & mL, mT, tels, que par les Mouvemens pV, mT, les Corps p, m, ne ſe nuiſent point l'un à l'autre, c'eſt-à-dire qu'on ait $AV + VT = Ap + pm$, & que par les Mouvemens px, mL, les Corps ſe faſſent équilibre. D'où il s'enſuit 1°. que mL doit être dans le prolongement de pm; 2°. que le Corps p pouvant couler (*hyp.*) le long du fil, il ne ſauroit y avoir d'équilibre, à moins que ſa direction px ne diviſe en deux également l'angle Apm. 3°. Enfin, que la force ſuivant mL doit être à la force ſuivant px, comme le Sinus de la moitié de l'angle Apm eſt au Sinus de cet angle entier.

Les lignes Ap, pm, px étant données de poſition, on voit aſſez, que ſi on connoiſſoit la grandeur des lignes px, πp, le Problême ſeroit réſolu, & qu'il n'y auroit plus que le calcul à faire : or 1°. les lignes px, πp doivent être telles que les angles VAp & pAP ſoient égaux, 2°. les lignes px & πp étant données, les lignes AV & VT ſont données de grandeur & de poſition, & la ſomme de ces lignes doit être conſtante. On aura donc deux conditions, d'où l'on tirera deux Equations qui ſerviront à trouver px & $p\pi$. En voici l'analyſe.

Soit $AN = 1$. $Nn = dx$, $AP = y$, $PQ = dy$, le Sinus de la moitié de l'angle APM, z, enfin c la longueur du fil.

1°. La différence de l'angle PAp (dx) + celle de l'angle APM $\left(\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}\right)$ eſt égale à l'angle de PM avec pm : donc cet angle de PM avec $pm = dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}$.

2°. $\frac{pD}{Pp}$ & $\frac{PD}{Pp}$, c'eſt-à-dire les Sinus des angles pPD, & PpD ſont données par le Sinus z & par celui de l'angle ApP ; je les exprime donc ainſi * $\varphi\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right)$ & $\Delta\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right)$, ou $\varphi\left(z, \frac{ydx}{\sqrt{[dy^2 + y^2dx^2]}}\right)$ & $\Delta\left(z, \frac{ydx}{\sqrt{[dy^2 + y^2dy^2]}}\right)$.

* Les quantités φ, Δ, miſes au-devant d'une autre quantité quelconque, marqueront toujours dans la ſuite une fonction de cette quantité.

Donc $pD = Pp \cdot \varphi(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}})$ & $PD = Pp \cdot \Delta(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}})$.

3°. $PM - pm = dy$ & $mB - pD = dy - (dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1 - zz]}})^2 \cdot \frac{(c-y)}{2}$.

4°. Si on fait $px = \beta$, $\pi p = \alpha$, on aura (*art.* 78.) l'angle $\pi Ap = dx - \frac{2\,dy\,dx}{y}$; $\pi Ap = \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}}$; pAV ou $xAp = \frac{\beta z}{y}$. Donc $\frac{2\,dy\,dx}{y} - \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} + \frac{\beta z}{y} = o\,(A)$.

5°. $A\pi = y + 2dy + y\,dx^2$; $Ap = A\pi + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}}$; $AV = Ap - \beta\sqrt{[1 - zz]}$. Donc $AV = y + 2\,dy + y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} - \beta\sqrt{[1 - zz]}$: donc en supposant dx constant, on a $ddy = y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} - \beta\sqrt{[1 - zz]}$ (*B*).

6°. Présentement, on a $\mu o = \alpha \cdot \frac{Mm}{Pp}$; $PM - \pi\mu =$ (*art.* 76.) $2\,dy - (dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1 - zz]}})^2\,(c - y)$; $\pi o = \pi\mu - ol$ (on suppose que μl est un Arc décrit du centre π & du rayon $\pi\mu$, & que MB est perpendiculaire à pB) $= \pi\mu - \frac{\alpha \cdot mB}{Pp}$; $op = \pi o + \frac{\alpha \cdot pD}{Pp}$; $oV = op - \beta\sqrt{[1 - zz]}$;

Or à cause de l'équilibre, on a $m \times oT : \frac{P.\beta}{2} :: 1 : \sqrt{[1-zz]}$; donc $oT = \frac{P.\beta}{2M\sqrt{[1-zz]}}$, donc $VT = oV - \frac{P\beta}{2M\sqrt{[1-zz]}}$. donc $VT = c - y - 2dy$

$$+ (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})^2 (c-y) - \frac{\alpha . mB}{Pp} + \frac{\alpha . pD}{Pp}$$

$- \beta\sqrt{[1-zz]} - \frac{P\beta}{2M\sqrt{[1-zz]}}$. Cette valeur de VT ajoûtée à la valeur de AV trouvée ci-dessus *n.* 5. doit être $= c$. delà on tirera une Equation, qui, avec l'Equation A servira à chasser α & β.

7°. L'angle $AVp = ApP - dx - \mathrm{p}pV$, & l'angle pVT ou $pVo = p\mathrm{p}o + \mathrm{p}pV + \mathrm{p}oV$. Or l'angle $\mathrm{p}oV = \frac{\beta z}{c-y}$, & l'angle $p\mathrm{p}O = p\pi o - \pi o\mathrm{p} = p\pi o$

$- \frac{\alpha . PD}{Pp.(c-y)}$; l'angle $p\pi o = p\pi\mu + \mu\pi o = p\pi\mu$

$$+ \frac{\mu o . MB}{Mm.(c-y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha . MB}{Pp.(c-y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha}{Pp.(c-y)} \times$$

$[PD + (c-y).(dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})]$; l'angle $p\pi\mu$ est égal à l'angle Ppm, plus l'angle de $\pi\mu$ avec pm, & ce dernier angle (*art.* 76.) est $= (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}) . (1 + \frac{2dy}{c-y})$; donc $AVp + pVT = ApP + Ppm - dx - \mathrm{p}pV$

$$+ (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}) . (1 + \frac{2dy}{c-y}) + \frac{\alpha}{Pp.c-y} \times$$

$[PD + (c-y).(dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})] - \frac{\alpha . PD}{Pp . c-y}$
$+ ppV + \frac{\beta z}{c-y}$; mais $ApP + Ppm = APM + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}$.
donc $d(\frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}) = (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}}).(\frac{2dy}{c-y} + \frac{\alpha}{Pp})$
$+ \frac{\beta z}{c-y}$. Cette Equation combinée avec l'Equation *B* ſervira à trouver les Equations des deux Courbes, α & β étant connus par le *n. 6*.

REMARQUE I.

122. Si l'on attache un fil *ABC* (Fig. 41) fixement en *A* & en *C*, & qu'un Corps *B*, peſant ou non, puiſſe couler librement le long du fil *ABC*, il eſt évident que ce Corps *B* décrira l'Ellipſe *MBN*, dont *A* & *C* ſont les foyers. Mais je dis, de plus, qu'il la décrira de la même maniére que s'il n'étoit pas attaché au fil, & qu'il deſcendit librement dans la cavité de cette Ellipſe. Car lors qu'il ſe meut librement dans l'Ellipſe, la direction du Mouvement qu'il perd à chaque inſtant, eſt une perpendiculaire à l'Ellipſe au point où eſt le Corps. Mais lorſqu'il ſe meut le long du fil *ABC*, la direction du Mouvement qu'il perd à chaque inſtant, eſt la ligne *BF* qui diviſe en deux également l'angle *ABC*; & cette ligne *BF* eſt comme l'on ſait par les Sections coniques, perpendiculaire à l'Ellipſe *MBN* en *B*. Donc &c.

REMARQUE II.

123. Si un fil $AMBNC$ fixe en A & en C (Fig. 42) paſſe à travers un Corps $KRBGL$ qui puiſſe couler librement dans ce fil, & que toutes les parties de ce Corps $KRBGL$ ſoient animées de viteſſes telles, qu'il ſoit en équilibre, je dis que la force réſultante doit avoir pour direction la ligne GR qui coupe en deux également l'angle AGC, fait par les lignes AK, CL prolongées. Autrement le Corps RKG, gliſſeroit ou vers A ou vers C, & par conſéquent il n'y auroit point équilibre, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

D'après cette remarque, il eſt aiſé de trouver la Courbe que décrivent les points K, L, & la viteſſe de chacun de ces points, lorſque le Corps a reçu une impulſion quelconque. Car il y a pour chaque inſtant quatre inconnues à trouver, ſavoir les directions des points K & L, & leurs viteſſes. Or il faut que ces directions & ces viteſſes ſoient telles, que $AK + CL$ faſſe une quantité conſtante, auſſi-bien que la diſtance KL: de plus, les forces perdues doivent être tellement dirigées pour chacun des points du Corps KRL, que la réſultante ait pour direction GR; cette derniére condition produit deux Equations. Car regardant la force perdue par chaque particule, comme compoſée de deux autres; l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à GR, il faut que la ſomme de ces derniéres ſoit zero, & que la direction de la force réſultante des autres ſoit GR; on aura donc en tout quatre

Equations & quatre inconnues, & le Problême sera résolu. Je n'en donne point le calcul, parce qu'on imagine bien qu'il est trop long & très-compliqué, & qu'il suffit ici d'en présenter l'esprit.

SCOLIE GENERAL.

124. Je ne finirai point cette matiére, sans faire ici une observation assez importante sur la solution des Problêmes, dans lesquels on suppose que les Corps se tiennent par des fils. Comme les fils sont supposés inextensibles, les Corps ne peuvent jamais se trouver à une distance l'un de l'autre, plus grande que la longueur qui les sépare; mais rien n'empêche qu'ils ne puissent se trouver à une distance plus petite que cette même longueur. Ainsi, deux Corps étant, par exemple, attachés aux deux extrêmités d'un fil, si on leur donnoit des Mouvemens tels, qu'ils pussent suivre ces Mouvemens sans que le fil s'allongeât, il est évident qu'ils suivroient ces Mouvemens précisément de la même maniére, que s'ils étoient libres, & qu'il n'y auroit alors aucun Problême à résoudre. Aussi ne pourroit-on pas appliquer à ces sortes de cas le Principe général dont nous nous sommes servis jusqu'ici : car si on vouloit faire usage de ce Principe, on trouveroit que les Mouvemens par lesquels les Corps devroient se faire équilibre, au lieu de tendre à allonger le fil, tendroient au contraire à en rapprocher les extrêmités; & qu'ainsi, puisque le fil ne fait aucune résistance à ce dernier effort, ces Mouvemens ne pourroient être détruits.

En

En général, quand les Corps se tiennent par des fils, le moyen de s'assurer si les fils doivent rester toujours tendus, c'est de voir si en les supposant tels, les forces qui doivent faire équilibre, ont des directions qui tendent à allonger le fil. Si cela est, on aura eu raison de supposer que les fils ne se plioient point ; sinon les Corps seront mûs précisément comme s'ils étoient libres, & qu'ils ne fussent pas joints ensemble. On n'a pas besoin de prendre toutes ces précautions, quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles auxquelles ils sont fixement attachés. Car leur distance est toujours nécessairement égale à la longueur de la verge qui les sépare, & ne peut être ni plus grande ni plus petite. Aussi la remarque que nous venons de faire sur le cas où les Corps se tiennent par des fils, seroit inutile, si au lieu d'être joints par des fils, ils l'étoient par des verges inflexibles unies ensemble par des charniéres. Il y a, au reste, une analogie parfaite entre ce dernier cas & celui des fils. Car, quand les Mouvemens imprimés à des Corps unis par des fils sont tels, que les fils par leur inextensibilité puissent les altérer, il arrive précisément à ces Mouvemens le même changement, que si les fils étoient des verges inflexibles jointes ensemble par des charniéres.

§. IV.

Des Corps qui se poussent ou qui se choquent.

PROBLÊME IX.

125. *Un Corps dont la masse est* m, *& la vitesse* u *se mouvant sur une même ligne avec un autre Corps dont la masse est* M *& la vitesse* U, *trouver la vitesse de ces Corps après le choc.*

Soit v la vitesse du premier Corps après le choc, V celle du second : on fera (*art.* 23) $u = v + u - v$ & $U = V + U - V$. Il faut par notre Principe, que $V = v$ & que $m(u - v) + M(U - v) = o$. Donc v ou $V = \frac{mu + MU}{M + m}$.

COROLLAIRE.

126. Si un Corps M de masse quelconque animé d'une vitesse donnée U est choqué par un Corps m infiniment petit, dont la vitesse soit u, il recevra par ce choc une quantité de Mouvement = à $m(u - U)$, & si u est infiniment plus grande que U, la quantité de Mouvement qu'il recevra sera égale à mu, c'est-à-dire à la quantité de Mouvement du Corps choquant. On voit par-là, que quand le Mouvement d'un Corps est accéléré ou retardé par une puissance impulsive, dont il reçoit, pour ainsi dire, à chaque instant des coups réitérés ; la quantité de Mouvement que le Corps perd ou gagne à chaque inf-

tant, ne doit être regardée comme proportionnelle à la puissance impulsive, qu'en regardant cette puissance comme une masse infiniment petite, animée d'une vitesse infinie par rapport à la vitesse du Corps poussé. En ce cas, l'effet de cette puissance est toujours le même, soit que le Corps se meuve ou qu'il soit en repos.

REMARQUE.

127. C'est ici le lieu de prouver ce que nous avons avancé plus haut, (*art.* 19.) que le Principe des forces accélératrices proportionnelles à l'Élément de la vitesse, ne doit point être employé pour déterminer les Mouvemens qui résultent de l'impulsion. En effet, supposons, par exemple, qu'un Corps vienne en choquer un autre en repos, la quantité de Mouvement gagnée par le choqué, sera $\frac{muM}{M+m}$. Il faudroit donc que la cause productrice de ce Mouvement fût proportionnelle à $\frac{mMu}{M+m}$. Mais 1°. comment peut-on prouver que la cause motrice du Corps M est proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, plutôt qu'à une autre fonction quelconque des grandeurs M, m, u? Ne seroit-il pas même assez naturel de penser que mu pourroit être regardé comme proportionnelle à la cause motrice, ce qui ne manqueroit pas d'induire en erreur, puisque la quantité de Mouvement du Corps M n'est point com-

me mu, toutes choses d'ailleurs égales. 2°. Quand on sauroit que la cause motrice est proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, on ne pourroit en conclure rien autre chose, sinon que la quantité de Mouvement du Corps M regardée comme son effet, seroit proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, sans savoir si elle seroit précisément cette quantité même. Il faut donc nécessairement employer d'autres Principes, pour déterminer la quantité absolue de Mouvement du Corps choqué.

LEMME IX.

128. *Soit sur un plan* QR *un Corps* AKQR (Fig. 43) *de figure quelconque, qui puisse glisser librement sur ce plan de* Q *vers* R, *ou de* R *vers* Q, *& soit un Corps quelconque* M, *placé sur* KQ *en tel endroit qu'on voudra ; supposons que le Corps* AKQR *ait suivant* RQ *une vitesse quelconque, & que le Corps* M *ait une vitesse & une direction telle qu'il fasse équilibre au Corps* AKQR : Je dis que cela ne peut arriver 1°. que MO perpendiculaire à KQ ne soit la direction du Corps M. 2°. Que la force du Corps M suivant MO, & la force du Corps $AKQR$ suivant RQ, ne se réduisent à une seule force dont la direction soit perpendiculaire au plan QR.

COROLLAIRE.

129. Donc la force du Corps M doit être à celle du Corps $AKQR$, comme GL est à LS.

SCOLIE.

130. La direction de la force résultante de celles des deux Corps, doit être nonseulement perpendiculaire au plan, mais passer par la base *QR*. D'où l'on voit que si on mene par le centre de gravité de la figure *AKQR* unè droite paralléle à *QR*, cette droite doit couper la ligne *MO* en un point, d'où l'on püisse mener une perpendiculaire qui tombe sur *QR*.

PROBLÊME X.

131. *Supposant le Corps* M *animé d'une force accélératrice quelconque perpendiculaire à la base* QR, *& le reste comme dans le Lemme précedent, on demande le Mouvement du Corps* M *& de la figure.*

Soient *AB*, *BC* (Fig. 44) deux côtés consécutifs de la figure, tels que *AB* = *BV*, & supposons que tandis que le Corps *M* parcourt *A*B, la figure ait parcouru *Aa*; ensorte que les côtés *AB*, *BC* soient parvenus dans la situation *a*B, B*D* : soit $a\alpha$ = *Aa*, Bb = *A*B, & enfin la ligne bδ, celle que le Corps *M* parcourroit en vertu de sa force accélératrice : les lignes $a\alpha$, Bδ seroient celles que les deux Corps parcourroient dans l'instant suivant, sans leur action mutuelle. Au lieu de ces lignes ils parcourront, l'un, la ligne *A*a, l'autre, la ligne B*z*, terminée par le côté b*z* paralléle à βd ; & il faut par notre Principe, que la masse du Corps *M* animée de la vitesse δz fasse équilibre à la masse m de la figure, animée de la vitesse aα. D'où il s'ensuit, que δz doit être perpendiculaire à bz, & que $m \cdot \alpha a : M \cdot z\delta :: ib : z\delta$. donc $m \cdot \alpha a = M \cdot ib$. mais $ib = kz - bo - a\alpha$ & $a\alpha = d(\alpha a)$. donc si on nomme Aa, du, BK, dy, on aura $m\,ddu = M\,ddy - M\,ddu$, ou $ddu \cdot (M+m) = M\,ddy$. Equation générale & fort simple pour trouver le Mouvement des deux Corps, quelle que soit la force accélératrice qui agisse sur le Corps M, pourvû que cette force soit toujours perpendiculaire à QR.

SCOLIE I.

132. Les Constantes qu'il faut ajoûter dans l'intégration de l'Equation $M\,ddy = (M+m) \cdot ddu$. dépendent du premier dy & du premier du, qu'il est toujours facile de trouver. Par exemple, si la direction du Mouvement du Corps M en A (Fig. 45) est suivant la Tangente de la Courbe AB en A; il faudra tirer la Tangente AP, & prendre $AO = \frac{PN \cdot M}{M+m}$ pour avoir le point O où la figure se trouvera, lorsque le Corps M sera en N.

Si le Corps M agit par sa seule force accélératrice sans aucune impulsion primitive, il faudra tirer AQ perpendiculaire à BD, & prendre $AO = \frac{NQ \cdot M}{M+m}$.

Au reste, il est clair par *l'art.* 70. que dans ce dernier cas, le centre de gravité commun des deux Corps defcend dans une ligne droite verticale.

SCOLIE II.

133. On pourroit donner plufieurs autres folutions de ce Problême, qui toutes fe terminent à donner l'Equation $Mddy = (M + m) . ddu$: j'ai préferé la folution qu'on vient de voir à toutes les autres, parce qu'elle eft extrêmement fimple.

Tous les Problêmes analogues à celui-ci qu'on pourra propofer, fe réfoudront toujours par l'application de notre Principe, & il n'y aura de difficulté que dans le calcul.

LEMME X.

134. *Soient deux Spheres* G, C, *mues fuivant* GB, CD, (Fig. 46) *avec des viteffes qui foient repréfentées par les lignes infiniment petites* GB, CD; *il eft clair que fi* DB=CG, *c'eft-à-dire fi* DE=BF, *les Mouvemens de ces deux Spheres ne fe nuiront point l'un à l'autre*; d'où il s'enfuit qu'en général, pour que ces Spheres ne fe nuifent point, il faut dans chacune que la viteffe du point touchant *A* fuivant la perpendiculaire *CAG* aux deux Corps, foit la même de part & d'autre.

COROLLAIRE.

135. Si deux Corps de figure quelconque fe touchent, alors en regardant comme une petite furface Spherique

leur point d'attouchement commun, on verra que pour que ces deux Corps ne se nuisent point, la vitesse du point d'attouchement estimée suivant une perpendiculaire aux deux surfaces en ce point, doit être la même pour chacun d'eux.

LEMME XI.

136. *Si tant de Corps qu'on voudra viennent se choquer de manière, qu'en les supposant parfaitement durs & sans ressort, ils demeurent tous en repos après le choc; je dis que s'ils sont à ressort parfait, ils retourneront en arrière chacun avec la vitesse qu'il avoit avant le choc.* Car l'effet du ressort est de restituer en sens contraire à chaque Corps le Mouvement qu'il a perdu par l'action des autres.

COROL.

137. Donc, si tant de Corps durs qu'on voudra se choquent à la fois, & que a, b &c. soient leurs vitesses avant le choc, qui soient changées après le choc en a, b &c. alors regardant les vitesses a, b &c. comme composées des vitesses a, α; b, β; les vitesses de ces mêmes Corps après le choc, seront composées des vitesses a, $-\alpha$; b, $-\beta$; &c.

Nous ne parlerons donc dans les Problêmes suivans que du choc des Corps durs, puisqu'on en déduit aisément les loix du Mouvement des Corps Elastiques.

Je n'examine point ici s'il y a des Corps parfaitement durs,

durs, c'eſt une queſtion qui appartient plutôt à la Phyſique qu'à la Mécanique, & je ne ſuppoſe ici des Corps parfaitement durs, que comme on ſuppoſe d'ordinaire dans la Mécanique des Leviers inflexibles, des Machines ſans frottement &c. Je ſuppoſe auſſi comme une verité d'Expérience, que le reſſort rend à chaque Corps en ſens contraire ce qu'il a perdu de Mouvement par le choc, ſans examiner de quelle maniére ſe fait cette reſtitution.

Comme il eſt aſſez bien prouvé que les Corps à reſſort s'applatiſſent & ſe compriment par le choc, pour ſe rétablir enſuite dans leur premiére figure, on pourroit croire que ce n'eſt pas le véritable moyen de trouver les loix du Mouvement de ces Corps, que de les ſuppoſer incompreſſibles, comme nous faiſons ici ; & il eſt vrai que cette circonſtance de plus ou de moins doit apporter à ces loix beaucoup de changement, comme nous le ferons voir plus bas. Quoi qu'il en ſoit, nous pouvons ſuppoſer au moins, que les Corps changent très-peu de figure, & que la compreſſion auſſi-bien que la reſtitution ſe fait dans un tems très-petit; en ce cas, le Mouvement après le choc ſera ſenſiblement le même, que ſi on conſidéroit les Corps comme incompreſſibles. On réſoudroit ces Problêmes exactement, ſi on ſavoit ſuivant quelle loi la figure du Corps change par la compreſſion ; mais on ne peut faire ſur cela que des hypotheſes.

PROBLÊME XI.

138. *Suppoſons qu'un Corps* A (Fig. 47) *en vienne*

choquer un autre BOQ *en repos, suivant une direction* AC *qui ne passe pas par le centre de gravité* M *du Corps choqué, on demande le Mouvement de ces deux Corps après le choc.*

Quelque Mouvement que prenne le Corps *BOQ*, il est certain (*art.* 64) que son centre *M* ira toujours en ligne droite après le choc, tandis que toutes ses parties tourneront autour de ce même centre. Il faut, de plus, par notre Principe, que si on imprimoit à ce Corps un Mouvement contraire à celui qu'il a reçu par le choc, il fît équilibre avec le Corps *A* animé du Mouvement qu'il a perdu par le choc.

C'est une proposition aisée à démontrer, que si le centre de gravité *M* d'un Corps se meut suivant une direction quelconque, & que ce Corps tourne en même tems autour de son centre, la direction de la force résultante sera paralléle à la direction du centre de gravité. Or la direction de cette force ne peut ici être autre que la ligne *CA* perpendiculaire à l'endroit du contact: donc le Mouvement du centre *M* doit être paralléle à *CA*. De plus, la vitesse de rotation doit être telle, qu'étant combinée avec le Mouvement du centre *M*, les Corps ne se nuisent point, c'est-à-dire qu'ils ayent dans le même sens une vitesse égale. Or abaissant la perpendiculaire *MN* sur *CA*, il est aisé de voir que le Mouvement du point touchant *A* suivant *AN*, est égal au Mouvement du point *N*. La difficulté se réduit donc à trouver la vitesse du point *M*, & la vitesse de rotation du point *N*.

Soit u la vitesse du Corps A avant le choc, u sa vitesse après le choc, α la vitesse de M, v la vitesse de rotation du point N, on aura 1°. $\alpha + v = \mathrm{u}$. De plus, la force résultante des Mouvemens des parties du Corps M en sens contraire, doit être égale à $A . (u - \mathrm{u})$; or cette force doit être $=$ à $M . \alpha$, & avoir pour direction la ligne CA; on a donc 2°. $M . \alpha = A . (u - \mathrm{u})$: 3°. si on nomme p la somme des produits des parties du Corps M par le quarré de leurs distances à M, on aura $\frac{vp}{MN} = M . \alpha . MN$. ces trois Equations serviront à trouver les inconnues α, v, u; Ce *Q. F. Trouver.*

PROBLÊME XII.

139. *Deux Corps spheriques* A, a, (Fig. 48) *attachés aux verges* CA, Ca, *fixes en* C *&* *en* c, *se choquant avec des vitesses données, trouver leurs vitesses après le choc; on suppose qu'avant le choc ils vont tous deux d'un même côté.*

Soient u, v, les vitesses des centres A, a, avant le choc, u, v, les vitesses de ces mêmes centres après le choc. Par notre Principe, il faut que ces vitesses u, v soient telles, que les deux Corps ne se nuisent point, & que si leurs centres avoient les vitesses $u - \mathrm{u}$, $v - \mathrm{v}$, les deux Corps se fissent équilibre, c'est-à-dire que les points A, a, étant animés des vitesses $u - \mathrm{u}$, $v - \mathrm{v}$, il faut que la force du Corps A regardée comme réunie en A, & agissant suivant Aa, soit égale à la force du Corps a regardée comme réunie en a, & agissant suivant aA.

Si on mene les perpendiculaires CG, cg à Aa, la premiére de ces deux conditions donne $\frac{\mathrm{u}.CG}{CA} = \frac{\mathrm{v}.cg}{ca}$. De plus, si on nomme F la somme des produits des particules du Corps A par le quarré de leurs distances à C, & f la quantité analogue à celle-là pour le Corps a, la seconde condition donnera $\frac{F.(u - \mathrm{u})}{AC.CG} + \frac{f.(v - \mathrm{v})}{ac.cg} = 0$: de ces deux Equations, on tirera la valeur de u & celle de v.

Corol. I.

140. Si les Corps sont Elastiques, leurs vitesses après le choc seront (*art.* 137.) $\mathrm{u} + \mathrm{u} - u$ & $\mathrm{v} + \mathrm{v} - v$. la somme des forces vives après le choc, sera $\frac{F}{AC^2}(2\mathrm{u} - u)^2 + \frac{f}{ac^2}(2\mathrm{v} - v)^2 = \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fv^2}{ac^2} + \frac{4F}{AC^2}(\mathrm{uu} - \mathrm{u}u) + \frac{4f}{ac^2}(\mathrm{vv} - \mathrm{v}v)$. Mais si on multiplie le premier de ces deux derniers termes par $\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA}$, & l'autre par $\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca}$, ce qui ne change point leur valeur, on verra qu'à cause de $\frac{\mathrm{u}.CG}{CA} = \frac{\mathrm{v}.cg}{ca}$, & de $\frac{F.(u - \mathrm{u})}{AC.CG} + \frac{f.(v - \mathrm{v})}{ac.cg} = 0$, ils se détruisent mutuellement. Donc la somme des forces vives après le choc $= \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fvv}{ac^2}$, c'est-à-dire que la somme des forces vives avant & après le choc, est la même.

Corol. II.

141. Si les lignes CA, ca sont paralléles dans l'instant du choc, il faudra faire $CG = CA$; $cg = ca$, & le reste comme ci-dessus. Ce dernier cas a été résolu par M. *Jean Bernoulli* le fils, dans le Tom. 7. des *Mémoires de Petersbourg*, en supposant les Corps Elastiques. Nos deux solutions sont fort différentes, quant à la Méthode & quant au résultat. Car dans le Mémoire de M. *Bernoulli*, les vitesses après le choc sont exprimées par des quantités radicales; ici on peut s'assurer aisément qu'il n'y aura point de radicaux: les quantités F, f, les seules qui pussent faire entrer des radicaux dans l'expression des vitesses, n'en contiennent point, puisqu'en nommant b, β les rayons des Spheres A, a, CN, a, cn, α, on trouve

$$F = (\mathrm{aa} + 2\mathrm{a}b + \tfrac{7}{5}\,bb).A, \&\ f = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \tfrac{7}{5}\,\beta\beta).a.$$

Mais outre que la solution de M. *Bernoulli* n'est pas directe, étant appuyée sur le Principe de la conservation des forces vives, cette solution est fondée encore sur un autre Principe que je ne crois pas vrai. Ce Principe consiste à regarder le Corps A mû par la verge infléxible CA, comme si toutes ses parties se mouvoient d'un Mouvement égal à celui du centre A, & qu'en même tems le Corps A tournât sur son centre avec un Mouvement angulaire égal à celui de la verge. En conséquence la force du Corps A est la même selon lui, que s'il n'étoit point attaché à la verge, & que toutes ses parties eussent une vitesse égale à celle de son centre, sans aucune rotation; ce qui me paroît contraire aux loix de la Mécanique. M. *Bernoulli* se contente de faire voir *art*. XV. de son Mémoire, que dans l'un & l'autre cas la quantité de Mouvement est la même, soit que le Corps tourne autour de *C*, ou que toutes ses parties se meuvent avec une vitesse égale à celle du centre *A*, ce qu'on ne peut lui contester. Mais dans une Sphere qui tourne autour d'un point fixe, la quantité de Mouvement & la force ne sont pas la même chose: il faut avoir égard de plus au bras de Levier par lequel chaque particule agit; c'est la somme des produits de chaque Elément par sa vitesse & par sa distance au point fixe, qui fait la force, & non pas seulement la somme des produits de chaque Elément par sa vitesse.

PROBLÊME XIII.

142. *Deux Corps* A, B, (Fig. 49) *attachés aux fils* CA, GB *fixes en* C *&* *en* G, *venant à se choquer, trouver leurs Mouvemens après le choc.*

Soit *u* la vitesse du point *A* avant le choc pour tourner autour de *C*, laquelle vitesse est commune à toutes les parties du Corps *A*, soit outre cela *v* la vitesse du centre de gravité du Corps *A* avant le choc, pour tourner autour du point par où le Corps est suspendu. Soient de même *U* & *V* les vitesses qui dans le Corps *B* avant le choc sont analogues à *u* & *v* : qu'enfin ces vitesses après le choc soient changées en u & v, U & V, qui doivent être telles, que les Corps A, B aillent de compagnie sans se nuire l'instant d'après le choc, & que s'ils n'avoient que les vitesses u — u, v — v; U — U, V — V; ils se fissent équilibre.

Toutes les parties du Corps A (Fig. 50) étant considérées comme animées de la vitesse u — u, on peut réduire tous leurs Mouvemens à une seule force, dont la direction OK passera par le centre de gravité du Corps A, & sera perpendiculaire à CA prolongée vers L. De plus le centre de gravité du Corps A étant animé de la vitesse v — v pour tourner autour de A, on trouvera (*art.* 112.) sans connoître la valeur de v — v, la direction NO de la force résultante. La force suivant OP que je suppose résulter des forces suivant OK, NO, doit s'anéantir : elle doit donc être telle, qu'on puisse la décomposer en deux autres, l'une suivant PL dans la direction de CA, l'autre suivant Pa perpendiculaire en a à l'endroit du contact des deux Corps. Or comme la position des points P, O, est donnée, par les lignes aP, CA, NO, KO, toutes données de position; il s'ensuit que la direction OP de la force résultante des forces suivant OK & NO est aussi donnée, & qu'ainsi le rapport de ces forces suivant OK & NO est donné. Mais en nommant m la masse du Corps A, on a la force suivant $OK = m.$ (u — u), & celle suivant $NO = m.$ (v — v). Donc le rapport de u — u à v — v est donné : on trouvera par un raisonnement semblable, que le rapport de U — U à V — V est donné pour l'autre Corps. On pourra donc des quatre inconnues u, v, U & V en chasser deux. On a, de plus, deux autres conditions à remplir, savoir que la force suivant *Pa* soit égale à celle qui agit pour l'autre Corps en sens contraire, & que, de plus, ces deux Corps aillent de compagnie l'instant d'après le choc, c'est-à-dire que la vitesse du point touchant *a* suivant *Pa*, soit la même pour l'un & pour l'autre : ces deux conditions donneront deux autres Equations qui serviront à trouver les deux inconnues restantes, & ces Equations ne passeront jamais le premier degré.

D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois.

PROBLÊME XIV.

143. *Supposons qu'un Corps spherique* A, (Fig. 51) *mû suivant une ligne donnée* AQ *avec une vitesse donnée, rencontre à la fois les deux Corps en repos* B, C, *on demande les directions & les vitesses de ces trois Corps après le choc.*

Soit $AN = u$ la vitesse du Corps A avant le choc, AR, sa direction cherchée après le choc, & $AU = v$ sa vitesse aussi après le choc; BZ, CX des vitesses que reçoivent les Corps B, C, (on suppose que toutes ces lignes AN, AV, BZ, CX qui représentent des vitesses, sont infiniment petites.)

La vitesse BZ du Corps B, & la vitesse AV du Corps A, doivent être telles, (*art.* 134.) que $VZ = AB$. De même la vitesse CX du Corps C, & la vitesse AV du Corps A doivent être telles, que $VX = AC$. De plus, si ſi dans l'inſtant du choc, on ſuppoſe le Corps A animé des Mouvemens AV, VN, ou AV, Ap; & les Corps B, C, animés des Mouvemens égaux & contraires BZ, Bz; CX, Cx; il faut par notre Principe, que les Corps A, B, C, animés des Mouvemens Ap, Bz, Cx, ſe faſſent équilibre.

Soient les données $AQ = a$, $QS = T$, $QT = \mathrm{T}$, & les inconnues $QR = t$, $AV = v$; on aura (en menant RO perpendiculaire à AS & Ro à AT) $\frac{RO}{AR}$ $= \frac{(T - t) \cdot a}{\sqrt{[a^2 + T^2]} \cdot \sqrt{[a^2 + t^2]}}$; $\frac{Ro}{AR} = \frac{(\mathrm{T} + t) \cdot a}{\sqrt{[a^2 + \mathrm{T}^2]} \cdot \sqrt{[a^2 + t^2]}}$; de plus, à cauſe de $VZ = AB$, on aura $BZ = \frac{AV \cdot AO}{AR}$ $= v \left(\frac{\sqrt{[a^2 + T^2]}}{\sqrt{[a^2 + t^2]}} - \frac{(T - t) \cdot T}{\sqrt{[a^2 + T^2]} \cdot \sqrt{[a^2 + t^2]}}\right)$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable

$$CX = v \left(\frac{\sqrt{[a^2 + \mathrm{T}^2]}}{\sqrt{[a^2 + t^2]}} - \frac{(\mathrm{T} + t) \cdot \mathrm{T}}{\sqrt{[a^2 + \mathrm{T}^2]} \cdot \sqrt{[a^2 + t^2]}}\right).$$

Mais ſi on mene du point V la perpendiculaire VP ſur AN, on aura, à cauſe de l'équilibre, $A \cdot PN = B \cdot \frac{BZ \cdot AQ}{AS}$ $+ C \cdot \frac{CX \cdot AQ}{AT}$, & $A \cdot VP = \frac{B \cdot BZ \cdot QS}{AS} + \frac{C \cdot CX \cdot QT}{AT}$. En mettant dans ces Equations au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on parviendra à déterminer u & t; & on verra, ſi l'on veut en faire le calcul, qu'il n'y a jamais que des Equations lineaires à réſoudre.

REMARQUE I.

144. Je ne m'étends pas davantage sur la solution de ce Problême, & je ne cherche pas même à la simplifier, parce que l'on en trouve une très-belle solution dans le nouvel Ouvrage de M. *Mac-Laurin*. On peut, au reste, par notre Principe, trouver les loix du choc quand une boule en rencontre à la fois tant qu'on voudra; problême qui a été résolu par M. *Jean Bernoulli*, mais par le Principe de la conservation des forces vives, & seulement pour le cas où les boules choquées sont égales & disposées semblablement de part & d'autre de la direction de la boule choquante. M. *Bouguer* a aussi résolu ce Problême pour ce dernier cas seulement (*Journ. des Sav. Avr.* 1728) mais sans y employer le Principe de la conservation des forces vives. M. *Bernoulli* dans sa piéce sur le Mouvement, a tiré de la solution qu'il a donnée un grand nombre de très-belles conséquences sur le Mouvement des Corps dans les Fluides. Il y a entr'autres plusieurs Theorêmes qu'il n'a pas démontrés, & qui pourront trouver leur place dans un Traité sur les Fluides, que j'espere donner après celui-ci.

REMARQUE II.

145. Au reste, quand on fait attention à la Nature du Problême général des Corps qui se choquent plusieurs à la fois, avec des vitesses & des directions données, on

peut rencontrer dans le détail plusieurs difficultés qu'il est bon d'éclaircir ici, & qui pourront nous donner lieu de faire sur les loix du choc des Corps, quelques observations nouvelles.

Supposons, par exemple, qu'une boule *A* (Fig. 52) mue suivant *AL*, rencontre à la fois les boules *C*, *D*, *E*, *F* semblablement situées de part & d'autre de la ligne *AL*; que les boules *F*, *E* soient en repos, & que les boules *C*, *D*, ayent parallélement à *AL* une vitesse égale à celle du Corps *A*; il est évident que le Corps *A* n'aura aucune action sur les boules *C* & *D*, & que tout se passera de la même maniére, que si le Corps *A* ne touchoit que les boules *E*, *F*. Mais si les boules *C*, *D* avoient une vitesse moindre que celle du Corps *A* suivant *AL*; alors le Corps *A* auroit de l'action sur ces boules, & il paroît d'abord qu'il doit communiquer du Mouvement à toutes les quatre.

Cependant voici une difficulté. Supposons que la vitesse des boules *C* & *D* avant le choc, ne soit que de très-peu moindre que la vitesse du Corps *A* : si elle n'est que très-peu augmentée après le choc, alors, comme les boules *A*, *C*, *D*, doivent aller de compagnie, la vitesse de la boule *A* ne sera que très-peu diminuée; de plus, les boules *F*, *E* devant aller aussi de compagnie avec la boule *A*, auront une vitesse qui sera à la vitesse du Corps *A* après le choc, comme le Cosinus de l'angle *BAF* au Sinus total, & qui par conséquent sera comme infiniment plus grande que la vitesse perdue par le

Corps *A*. Mais par notre Principe, le Corps *A* animé de la viteſſe qu'il a perdue, doit faire équilibre aux Corps *E*, *F*, *C*, *D*, animés en ſens contraire de ce qu'ils ont gagné de viteſſes; or la viteſſe perdue par le Corps *A* étant (*hyp.*) très-petite, ne ſauroit faire équilibre aux viteſſes finies des Corps *E*, *F*. Donc la viteſſe des boules *C*, *D*, ne ſauroit être de très-peu augmentée. Mais d'un autre côté ſi leur viteſſe eſt augmentée d'une quantité qui ne ſoit pas très-petite, alors elles ne pourront aller de compagnie avec le Corps *A*, dont la viteſſe doit néceſſairement être diminuée.

On rencontre une nouvelle difficulté dans l'application du calcul à ce Problême. Car on trouve très-aiſément les expreſſions des viteſſes des cinq Corps après le choc, quoique ſuivant la remarque que nous venons de faire, il ne paroiſſe pas qu'il doive être facile de les trouver. Cependant le calcul eſt fondé expreſſément ſur les deux conditions, que les cinq Corps aillent de compagnie après le choc, & qu'animés en ſens contraire de ce qu'ils ont perdu ou gagné de viteſſe, ils ſe faſſent équilibre.

Mais ſi on examine de quelle maniére le calcul ſatisfait à ces conditions, on verra que de la façon dont il les exprime, elles ne s'accordent pas toujours avec la nature du Problême, & peuvent même conduire à une fauſſe ſolution, ſi on ne les applique comme il faut à la queſtion propoſée. Pour que les Corps, par exemple, aillent de compagnie après le choc, il faut que les viteſſes de ces Corps eſtimées ſuivant une perpendiculaire à l'endroit du contact, ſoient égales entr'elles, condition que le calcul exprime. Mais il faut, de plus, que ces viteſſes ſoient dans le même ſens ou dans des ſens différens, ſelon l'exigence du cas : condition que le calcul n'exprime point, & ne peut exprimer. De même, pour qu'il y ait équilibre entre les Corps touchans *F*, *C*, *D*, *E* & le Corps *A*, il ne ſuffit pas que la ſomme des Mouvemens de même part ſoit $= o$, ce qui eſt la ſeule choſe que le calcul exprime ; il faut encore que les Mouvemens faiſans équilibre, ſoient dirigés ſuivant *AB*, *FA*, *CA*, *DA*, *EA*.

Comme le calcul ne peut exprimer ces conditions, ce n'eſt qu'après avoir trouvé les valeurs & les directions des inconnues, qu'on peut voir ſi ces conditions ſont remplies. Si toutes les conditions ne ſont pas remplies, comme il arrive dans le cas dont il s'agit ici, c'eſt une marque qu'il y a de certains Corps dans le ſyſtême qui ne ſouffrent rien de l'action des autres, & dont les Mouvemens ne reçoivent aucun changement. Ainſi dans le cas préſent, quoique les Corps *C* & *D* ayent une viteſſe moindre que la viteſſe du choquant *A*, néanmoins ces Corps *C* & *D* ne recevront aucun changement, & tout ſe paſſera de la même maniére, que ſi le Corps *A* choquoit les deux Corps *E*, *F*, ſeuls. En effet, les Corps *C* & *D* ne peuvent diminuer de viteſſe par la rencontre du Corps *A* : ils ne peuvent non plus recevoir de viteſſe par l'action du Corps *A* ; car comme on la vu ci-deſſus, ces Corps ne peuvent aller de compagnie avec le Corps *A* après le choc. Or il n'y aura point d'action entre les Corps *A*, *C*, *D*, s'ils ne vont pas de compagnie après le choc. En effet, quand il y a action entre deux Corps, leurs Mouvemens peuvent toujours se réduire à des Mouvemens dans le même sens pour chacun, par lesquels ils ne se nuisent point, & a des Mouvemens contraires qui se détruisent. Or les Mouvemens contraires ne peuvent se détruire, que les Mouvemens dans le même sens ne soient égaux. Car si le premier Corps alloit plus vîte que le second, il n'y auroit entre l'un & l'autre aucune action mutuelle possible.

REMARQUE III.

146. Il n'en est pas de même, lorsque les Corps *A*, *C*, *D*, *E*, *F* sont des Corps à ressort. La vitesse du Corps *A* ne diminue que petit à petit & par des degrés insensibles, ainsi il ne peut manquer d'agir sur les Corps *C*, *D*, & par conséquent il doit nécessairement altérer leurs Mouvemens. C'est pourquoi il faut bien se garder, pour trouver dans ce cas-là les vitesses après le choc, de se servir de la regle que nous avons donnée *art.* 137.

Cette réflexion m'en a fait faire une autre, c'est que pour les loix du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois, cette même regle peut être souvent très-fautive.

Supposons, par exemple, les cinq Corps *A*, *F*, *E*, *C*, *D*, (Fig. 52) à ressort parfait, il se fait dans l'instant du choc une compression dans chacun de ces Corps, telle que le Corps choqué reçoit à chaque inſtant en arriére, ſuivant chacune des directions FA, CA, DA, EA une quantité de Mouvement infiniment petite, égale à celle que les Corps F, C, D, E reçoivent en avant: ces Corps s'applatiſſent ainſi de plus en plus, juſqu'à ce qu'enfin ils puiſſent aller de compagnie avec des viteſſes, qui ſoient égales dans le même ſens, pour lors ils commencent à ſe rétablir peu à peu, & perdent ou gagnent de nouveau des quantités de Mouvement égales à celles qu'ils ont déja perdu ou gagné.

Mais comme nous ignorons entiérement ſuivant quelle loi le reſſort produit l'accélération dans les Corps, nous ne pouvons ſavoir ſi les cinq Corps ceſſent d'être comprimés tous cinq au même inſtant; & ſi, par exemple, les Corps C & D ne commencent pas à ſe rétablir, quoique les Corps E, F ne ſoient pas encore entiérement comprimés. En ce cas, les cinq Corps n'iroient point de compagnie après le choc, en ſuppoſant même que le reſſort ne les rétablit pas dans leur premier état. Or ſi cela étoit, il ne faudroit plus pour trouver le Mouvement des cinq Corps après le choc, ſe ſervir de la Méthode de *l'art.* 137, en regardant d'abord les cinq Corps comme durs; car cette Méthode ſuppoſe formellement, que les cinq Corps (abſtraction faite de leur reſſort) aillent de compagnie après le choc.

Une raiſon qui donne lieu de douter que la compreſſion finiſſe dans le même inſtant pour tous les cinq Corps, c'eſt qu'il y a néceſſairement des cas où cela ne peut arriver, comme quand les Corps C & D sont supposés avoir une vitesse paralléle à AL, & qui soit de très-peu moindre que celle du Corps A suivant AL.

S'il y a des cas où la compression des cinq Corps puisse finir en même tems, on conçoit qu'en changeant quelques circonstances, alors la compression pourra ne pas finir dans le même tems; par exemple, si la boule A rencontre quatre boules C, D, E, F, égales, & en repos, & que la compression dans ce cas-là finisse au même instant pour toutes les boules (ce qui ne peut pourtant être prouvé) on conçoit qu'en augmentant la masse des deux boules C & D, il pourra se faire que ces deux boules achevent d'être comprimées avant les deux boules E, F, ou ne le soient qu'après. Il est donc absolument nécessaire de chercher comment il faut s'y prendre dans ce cas, pour avoir les loix du choc. C'est ce qu'on va voir dans l'article suivant.

Du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois.

147. Je regarde avec plusieurs Auteurs deux Corps A, B, à ressort qui se choquent, (Fig. 53. 54) comme s'ils étoient réduits à leurs centres de gravité A, B, & qu'il y eut un ressort placé entre deux, capable de contraction & de dilatation, ce qui représente la compression & restitution successive des deux Corps. De plus, comme la compression se fait en fort peu de tems, j'imagine que ce ressort ne se dilate & ne se contracte pas beau-

coup,

coup, mais qu'étant très-peu contracté il a une très-grande force; & j'exprime cette force par une fonction de la quantité dont le ressort est contracté ou dilaté, c'est-à-dire que je suppose proportionnelle à cette fonction la petite quantité de Mouvement que l'un des Corps perd, & que l'autre reçoit à chaque instant: car ces deux quantités de Mouvement sont égales (*art.* 126) parce que le ressort tend à se débander également en sens contraire, avec une vitesse qu'on doit regarder comme infinie par rapport à celle des deux Corps, sa masse étant infiniment petite par rapport à celles de ces mêmes Corps.

Cela supposé, si a, b (Fig. 54) sont les points où sont parvenus les Corps A, B, & qu'on nomme Aa, x, Bb, y, & t le tems écoulé, on aura $-Addx = \varphi(x-y).dt^2$, & $Bddy = \varphi(x-y).dt^2$; d'où l'on tire $-Addx = Bddy$, & $ndt - Adx = Bdy$, n étant un nombre constant, qu'on déterminera de la maniére suivante; on supposera que a, b, soient les vitesses des Corps A, B, en A, B, on aura par conséquent lorsque x, & $y = o$, $\frac{dx}{dt} = a$ & $dy = bdt$: donc $n = Aa + Bb$.

L'Equation intégrée donne $nt - Ax = By$, & par conséquent $-Addx = \varphi\left(x - \frac{nt - Ax}{B}\right) dt^2$; si l'on fait $x - \frac{nt - Ax}{B} = u$, on aura (à cause de dt constant) $-\frac{ABddu}{B+A} = \varphi u . dt^2$, & $-\frac{ABduddu}{B+A} = dt^2 . du\varphi u$; d'où l'on tire $Aqdt^2 - \frac{A.Bdu^2}{2.(B+A)} = dt^2 . \int du \varphi u$, &

$$dt = \frac{du \sqrt{B}}{\sqrt{[2.(B+A)]} . \sqrt{[q - \frac{\int du \varphi u}{A}]}}.$$

148. Au reste, si je donne ici cette solution, ce n'est pas qu'elle soit nécessaire pour trouver le Mouvement des Corps A, B; car dans cette hypothese il leur arrive précisément le même changement, que si la compression & la restitution se faisoient chacune dans un instant: & comme c'est principalement le Mouvement après le choc qu'on cherche, que d'ailleurs la loi d'accélération ou de retardation instantanée est inconnue, il est évident que la solution précedente ne peut jetter aucune lumiére sur ce cas particulier; aussi n'est-elle ici que comme une introduction à des cas plus compliqués.

149. Dans la Figure 55. imaginons que les Corps A, C, D, E, F soient des points unis par des ressorts AC, AD &c. & cherchons simplement les vitesses des Corps A, F, C, parce que les Corps E, D doivent subir précisément les mêmes changemens que les Corps F, C; supposons les Corps arrivés en a, f, c; menant les perpendiculaires $a\varphi, ax$, on aura $af = \varphi f$ à cause que les lignes Aa, Ff sont très-petites, le ressort AF n'étant que très-peu compressible, comme nous l'avons supposé plus haut. Si on nomme p le Cosinus de l'angle BAF, r, celui de BAC; on aura en faisant Aa, x, Ff, y, Cc, z, $-Addx = [2p\varphi(px - y) + 2r\varphi(rx - z)]\, dt^2$;

$Fddy = \varphi\,(px - y).dt^2$; $Cddz - \varphi\,(rx - z)\,dt^2$. Il y a un cas où ces Equations peuvent être séparées en général, c'est celui où $\varphi\,(px - y) = F\,(px - y)$; $\varphi\,(rx - z) = G\,(rx - z)$ (G & F étant des Constantes); en ce cas-là, on peut trouver les valeurs de x, de y, & de z en t par la Méthode expliquée dans la solution du Probléme 5 ci-dessus, où nous avons enseigné la maniére de construire des Equations semblables. Le ressort cessera de se comprimer entre les Corps A, F, lorsque pdx sera $= dy$, & entre les Corps A, C, lorsque rdx sera $= dz$.

150. Lorsque le Corps A ne choque que deux Corps F, E semblablement situés de part & d'autre; ce qui arrive au Corps F devant également arriver au Corps E, il n'y a pas plus de difficulté, que si le Corps A ne choquoit que le seul Corps F, & tout se passe à peu près, comme si la compression & la restitution se faisoient en un instant; c'est pourquoi les calculs précedens sont alors fort peu nécessaires. Ils peuvent néanmoins servir à trouver exactement la vitesse du Corps A, & le chemin du Corps F, qui se meut, non suivant la droite Ff, comme nous l'avons supposé, & comme on peut le supposer sans erreur, mais sur une très-petite Courbe.

Les Equations qu'on trouve d'abord, en supposant que F se meuve suivant Ff, & que $af = \varphi f$, sont $-Addx = 2p\varphi\,(px - y).dt^2$, & $Fddy = \varphi\,(px - y)\,dt^2$. d'où l'on tire comme dans *l'art.* 147. la valeur de x & de y en t. Mais si on nomme fo, (Fig. 56) s, on aura de plus la force suivant $fo =$ à la force suivant ao

multipliée par $\frac{fo}{ol}$, c'eſt-à-dire par $\frac{a\varphi}{FA}$ ou par $\frac{x\surd[1-p^2]}{a}$; (en appellant FA) a, & l'on prendra au lieu de $px-y$, la quantité plus exacte $px-y+\frac{(1-p^2)}{2a}.x^2$, parce que $ao-AF$ (en négligeant les différences troiſiémes), eſt $Ax-Ff+\frac{ax^2}{2FA}$. Ainſi on déterminera d'abord les valeurs de x & de y en t, par le moyen des Equations $-Addx=2p.\varphi(px-y)dt^2$, & $Fddy=\varphi(px-y)dt^2$; on remarquera enſuite, que dans la premiére de ces Equations, au lieu de $2p$, double du Coſinus de l'angle BAF, il faut mettre le double du Coſinus de l'angle Bal, qu'on trouvera $=p-\frac{x\surd[1-p^2]}{a}.\surd[1-p^2]$; on mettra enfin pour x, $x+u$, pour $y=y+q$, u & q exprimant des quantités très-petites, par rapport à x & à y, & l'on aura $Fddy+Fddq=$* $\varphi(px+pu-y-q+\frac{(1-p^2).x^2}{2a})dt^2$;

$$-Addx-Addu=[2p-\frac{2x.(1-p^2)}{a}]\times$$
$$\varphi(px+pu-y-q+\frac{(1-p^2).x^2}{2a})dt^2;$$

& $Fdds=\frac{x\surd[1-p^2]}{a}\times\varphi(px-y)dt^2$. Soit en géné-

* Nous ſuppoſons ici que la force ſuivant Ff eſt la même que la force ſuivant $a\varphi$, parce qu'elles ne différent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite du *ſecond* ordre, & que nous n'avons égard ici qu'aux quantités infiniment petites du *premier* ordre, négligées dans le premier calcul.

ral $d(\varphi\alpha) = d\alpha\Delta\alpha$ (α exprimant une variable quelconque) l'on aura au lieu des deux premiéres Equations,

$$Fddq = dt^2 \cdot (pu - q + \frac{(1-p^2).x^2}{2a}) \cdot \Delta(px - y);$$

$$-Addu = 2pdt^2 (pu - q + \frac{(1-p^2)x^2}{2a}) \Delta(px-y)$$

$$-\frac{2xdt^2.(1-p^2)}{a} \varphi(px-y).$$ d'où l'on tire $Fddq =$

$\frac{2xdt^2.(1-p^2)}{a} \varphi(px-y) - \frac{Addu}{2p}$: or comme x & y sont déja données en t, on aura par l'intégration de cette derniére Equation, la valeur de u en q & t, qu'on pourra exprimer ainsi $u = Rq + T$, R exprimant une Constante, & T une fonction de t; il faudra donc savoir intégrer l'Equation

$$Fddq = [(pR-1).q + pT + \frac{(1-p^2).x^2}{2a}] dt^2 \Delta(px-y)$$

ou en général $ddq = Nqdt^2 \Psi t + dt^2 \Gamma t$, N exprimant une Constante, & Ψt, Γt des fonctions de t. Cette Equation peut s'intégrer par une Méthode semblable à celle qui a déja été expliquée dans *l'art.* 101, en prenant q égale au produit de deux indéterminées. A l'égard de l'Equation $Fdds = \frac{x\sqrt{[1-p^2]}}{a} \times dt^2 \varphi(px-y)$, comme x & y sont données en t, tout le monde voit que son intégration est fort simple.

153. Soient deux Corps A, a, (Fig. 59) unis par un reſſort Aa, qui ſe choquent ſuivant AD, ad, de maniére que leur centre de gravité C reſteroit en repos, s'ils pouvoient ſe mouvoir ſuivant AD, ad; ces deux Corps décriront deux Courbes ſemblables ag, AG pendant le tems de la compreſſion, & la compreſſion finira lorſque Gg ſera perpendiculaire à chacune des Courbes; enſuite pendant la reſtitution du reſſort, ils décriront les Courbes GF, gf ſemblables aux premieres, d'où l'on voit que leur Mouvement après le choc ſera le même, que ſi la compreſſion & la reſtitution ſe faiſoit dans un inſtant. Cela eſt vrai en général, lorſque deux Corps à reſſort viennent ſe choquer d'une maniére quelconque; car il eſt aiſé de voir que le Mouvement de leur centre de gravité ne changeant point par leur action mutuelle, il n'y a qu'à chercher quels ſeroient leurs Mouvemens après le choc, s'ils venoient ſe frapper de maniére que leur centre de gravité fut en repos, & donner enſuite à tout le ſyſtême le Mouvement du centre de gravité.

Si les deux Corps étoient mous, leurs viteſſes après le choc ne ſeroient pas les mêmes que s'ils étoient durs. Car dans le cas de la dureté des deux Corps, les viteſſes avant le choc ſeroient aux viteſſes après le choc, comme Cd à Ca, & dans le cas où ils ſeroient mous, c'eſt-à-dire où le reſſort ſe comprimeroit ſans ſe rétablir, les mêmes viteſſes ſeroient comme Cd à Cg: or $Cg < Ca$. Donc &c.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

Du Principe de la conservation des forces vives.

154. SI des Corps agissent les uns sur les autres, soit en se tirant par des fils ou des verges infléxibles, soit en se poussant, pourvû qu'ils soient à ressort parfait dans ce dernier cas, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses, fait toujours une quantité constante; & si les Corps sont animés par des puissances quelconques, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses à chaque instant, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses initiales, plus les quarrés des vitesses que les Corps auroient acquis, si, étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrit. C'est dans ces deux Principes que consiste ce qu'on appelle *la conservation des forces vives.*

M. *Hughens* est le premier, que je sache, qui ait fait mention de ces deux Principes, & M. *Bernoulli* le premier qui en ait fait voir l'usage, pour résoudre élégamment & avec facilité plusieurs Problêmes de Dynamique. J'entreprends de donner dans ce Chapitre, sinon une démonstration générale pour tous les cas, au moins les Principes suffisans pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier.

155. Imaginons d'abord deux Corps *A*, *B*, (Fig. 60)

d'une étendue infiniment petite, attachés à la verge inflexible AB; & suppofons qu'on imprime à ces Corps des directions & des viteffes quelconques, repréfentées par les lignes infiniment petites AK, BD. Il faut par notre Principe, faire les parallélogrammes MC, NL, tels que $LC = AB$, & $B \times BM = A \times AN$; BC & AL feront les viteffes & les directions des Corps B & A. Or $BC^2 = BD^2 - 2CE \times CD - CD^2$, & $AL^2 = AK^2 + 2PL \times KL - KL^2$. donc $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \times BD^2 + A(2PL \cdot KL - KL^2) - B(2CE \cdot CD + CD^2)$ qui fe réduit à $A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2 + A \cdot KL^2 - B \cdot CD^2$, à caufe que $CE = PL$ & $A \cdot KL = B \cdot CD$.

On a donc $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2$ [$A \cdot KL^2 - B \cdot CD^2$.

COROLLAIRE I.

156. Si NA, BM font infiniment petites, c'eft-à-dire fi les viteffes AL, BC, ne différent qu'infiniment peu des viteffes AK, BD, la confervation des forces vives aura lieu. Car négligeant dans l'Equation les lignes KL, CD, on aura $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2$.

COROL. II.

157. Si NA, BM ne font pas infiniment petites, & qu'on faffe $CF = CD$; $LO = LK$, & en fens contraire, il eft aifé de prouver que $BF^2 = BD^2 - 4CE \cdot CD$, & $AO^2 = AK^2 + 4PL \times KL$. Donc $B \cdot BF^2 + A \cdot AO^2$

$= B(BD^2 - 2BM \cdot 2CE) + A(AK^2 + 2 \cdot AN \cdot 2PL)$
$= B \cdot BD^2 + A \cdot AK^2$, parce que $CE = PL$ & $A \cdot AN$
$= B \cdot BM$.

Donc la conſervation des forces vives a encore lieu ici. Mais, ſi l'on y fait attention, ce cas eſt préciſément celui du choc de deux Corps Elaſtiques (*art.* 137.)

De la conſervation des forces vives dans les Corps qui ſe tirent par des fils ou par des verges infléxibles.

158. Nous avons vu dans l'article précedent, que ſi deux Corps ſont attachés au bout d'une verge infléxible, & qu'on leur donne à chacun une viteſſe quelconque, la conſervation des forces vives n'a lieu que quand les viteſſes qu'ils prennent différent infiniment peu des viteſſes qu'ils ont reçues. Or la viteſſe initiale réelle de chacun de ces Corps, peut différer d'une quantité finie de celle qu'on a imprimé à chacun ſuivant une direction quelconque. Mais quand ils ont une fois commencé à ſe mouvoir chacun ſur ſa Courbe, leur viteſſe ne varie qu'infiniment peu d'un inſtant à l'autre. Ainſi dans le cas de l'*art.* 155. la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa viteſſe eſt toujours égale, non à la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de la viteſſe imprimée à chacune au premier inſtant, mais par le quarré de la viteſſe initiale réelle de chacune.

159. Il faut donc préſentement démontrer en général, que ſi des Corps ſe meuvent en ſe tirant par des fils ou

par des verges infléxibles, & que la viteſſe de chacun ne varie à chaque inſtant qu'infiniment peu, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes ſera conſtante, ſi les Corps ne ſont animés d'aucune puiſſance accélératrice, & que dans ce dernier cas, elle ſera égale à la ſomme des effets des forces motrices pour chaque Corps.

Or, j'obſerve d'abord, que le ſecond de ces deux cas ſuit immédiatement du premier; c'eſt-à-dire que le premier étant ſuppoſé vrai, le ſecond l'eſt auſſi néceſſairement. Car ſuppoſons deux Corps A, a, (Fig. 61) attachés l'un à l'autre par la verge Aa, & animés par des puiſſances motrices dirigées ſuivant les lignes quelconques EF, ef, dont la poſition à chaque inſtant ſoit telle qu'on voudra; que BA, ab ſoient les lignes que ces Corps ont décrites pendant un même inſtant, & qui peuvent par conſéquent repréſenter leurs viteſſes. Si chacun de ces Corps étoit libre, ils décriroient dans l'inſtant ſuivant les lignes AO, ao, égales & en ligne droite avec AB, ab; & ſuppoſant que AD, ad, repréſentaſſent l'effet des puiſſances motrices pendant cet inſtant, leurs viteſſes ſeroient changées en AN, an, & menant les perpendiculaires BC, bc ſur AC, ac, on auroit $AN^2 = AB^2 + 2 . AD . AC$. & $an^2 = ab^2 + 2 . ad . ac$; mais comme les viteſſes AB, ab, ſont les viteſſes réelles que les Corps ont dans le premier inſtant, & que les viteſſes AN, an n'en différent qu'infiniment peu, ces mêmes viteſſes AN, an ne différeront qu'infiniment peu des viteſſes dans lesquelles elles seront changées par l'action réciproque des deux Corps. Donc, si on nomme V, v, les vitesses AB; ab; U, u, les vitesses des Corps A, a au second instant, c'est-à-dire les vitesses qu'ils ont au lieu de AN, an, on aura $A \times UU + a . uu = A . AN + a . an^2$ $= A (AB^2 + 2AD . CA) + a (ba^2 + 2ad . ca)$ $= A . VV + a . vv + 2A . AD . CA + 2a . ad . ca$. Donc $A(UU - VV) + a(uu - vv) = 2A . AD . CA$ $+ 2a . ad . ca$, c'est-à-dire $2AVdV + 2audu = 2A . AD . CA + 2a . ad . ca$, ou $AVV + auu = \int 2A . AD . CA + \int 2a . ad . ca$. Mais si les Corps A, a, se mouvoient librement sur les Courbes GA, ga, il est clair que $\int 2A . AD . CA$ seroit l'effet de la force motrice de A depuis G jusqu'en A, & de même $\int 2a . ad . ca$ l'effet de la force motrice de a depuis g jusqu'en a. Donc &c.

Il est clair que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de Corps qu'on voudra, & que tout ce qu'on y a supposé, c'est que si la vitesse ne varie qu'infiniment peu d'un instant à l'autre, & que les Corps ne soient point animés de forces accélératrices, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses fait toujours une somme constante. C'est donc ce qui nous reste à démontrer en général. Pour cela nous avons besoin des Lemmes suivans.

LEMME XII.

160. *Soit un parallélogramme quelconque* BVbN;

(Fig. 62) *je dis, que si par un de ses angles quelconques* B, *on tire à volonté la ligne* BD *de grandeur & de position quelconque, & du point* D *on tire les perpendiculaires* Dn, DK, DG *sur* Bb, BV, BN *prolongées, on aura* $Bb . Bn = BV . BK + BN . BG$.

DÉMONSTRATION.

Des points N, V, b soient menées les perpendiculaires NE, VF, bH, sur BD prolongée; on peut regarder les côtés BV, BN comme représentant des puissances décomposées chacune dans les deux BF, VF; & BE, EN, & de même la Diagonale Bb comme une puissance décomposée dans les deux BH, bH. Donc, puisque la puissance Bb équivaut aux deux BN, BV, on aura $BE + BF = BH$: or à cause des triangles semblables bHB, BDn, on a $Bb \times Bn = BD \times BH = BD \times BE + BD \times BF = BN . BG + BV . BK$. Ce *Q. F. D.*

REMARQUE.

161. On voit aisément, que selon la position des points E, F l'un par rapport à l'autre & par rapport au point H; il faudra au lieu de la somme des produits $BN . BG$, & $BV . BK$ prendre leur différence, & la faire égale à $Bb . Bn$.

De la conservation des forces vives quand les Corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils.

162. Imaginons que trois Corps A, B, C, (Fig. 63)

ſoient attachés au fil ABC, & qu'on imprime à ces Corps les viteſſes $A\alpha$, $B\beta$, $C\varkappa$, qu'ils ſoient forcés de changer par leur action mutuelle dans les viteſſes AA, BD, CC, qui ſeront telles, que A$D = AB$; DC $= BC$, il faudra regarder par notre Principe les viteſſes $A\alpha$, $B\beta$, $C\varkappa$, comme compoſées des viteſſes AA, BD, CC; & des viteſſes Aa, Bb, Cc par leſquelles ſeules les Corps A, B, C, ſe feroient équilibre; il faut donc prouver que $A \cdot A\text{A}^2 + B \cdot BD^2 + C \cdot C\text{C}^2 = A \cdot A\alpha^2 + B \cdot B\beta^2 + C \cdot C\varkappa^2$, c'eſt-à-dire que $A \cdot Aa \cdot AQ - B \cdot BN \cdot BG + B \cdot BV \cdot BK - C \cdot Cc \cdot CM = o$. Or $CM = BK$ & $C \cdot Cc = B \cdot BV$. à cauſe de l'équilibre. De même $AQ = BG$ & $A \cdot Aa = B \cdot BN$. Donc &c.

Si au lieu du Corps A on ſuppoſoit un point fixe autour duquel les Corps B, C tournaſſent, on auroit $AQ = o$; $BG = o$, & la propoſition ſeroit encore vraye. Il eſt viſible par la nature de la démonſtration précedente, qu'elle eſt générale pour tel nombre de Corps qu'on voudra.

Si le point B n'étoit pas fixe en ſa place, mais pouvoit couler librement le long du fil, alors Bb diviſeroit l'angle ABC en deux également, & on auroit $A \cdot Aa = B \cdot BN$; $B \cdot BV = C \cdot Cc$, & $B \cdot BN = B \cdot BV$. & enfin $AQ - BG = BK - CM$, parce que AD + DC $= AB + BC$. donc $A \cdot Aa \cdot AQ - B \cdot BN \cdot BG + B \cdot BV \cdot BK - C \cdot Cc \cdot CM = o$.

On voit donc, ce me ſemble, que la conſervation des forces vives a lieu dans tous les cas poſſibles, quand les

Corps ne ſont regardés que comme des points, & ſe tiennent par des fils.

LEMME XIII.

163. *Soient trois Corps* A, B, C, *animés des viteſſes* AQ, BR, Cc, (Fig. 64) *& en équilibre ſur un Levier de figure quelconque; & ſoient* AB, BC *les diſtances de ces Corps l'un à l'autre. Imaginons le Levier dans une autre ſituation quelconque infiniment proche de celle-là, & que les points* F, G, E, *ſoient alors le lieu des Corps* A, B, C, *deſorte que* FG = AB; GE = BC: *je dis qu'en menant les perpendiculaires* GK, FX, EZ, *on aura* B.BR.BK = A.AQ.AX + C.Cc.CZ.

DE'MONSTRATION.

Tant que le Levier *ABC* n'eſt pas droit, cette propoſition peut ſe démontrer de la même maniére, que ſi *ABC* étoit un fil, parce que chacune des puiſſances peut toujours ſe changer en deux autres, dont la direction paſſe par les points où les deux autres ſont appliqués, & que l'on aura ainſi ſix puiſſances, égales deux à deux & directement oppoſées. *Voy. les art.* 160, 161, 162.

Il n'y a que le ſeul cas où le Levier *ABC* (Fig. 65) eſt droit, dans lequel une pareille décompoſition ne ſe peut faire, & pour lequel il eſt néceſſaire de trouver une démonſtration particuliére. Soient donc *AQ*, *BR*, *Cc* perpendiculaires au Levier *ABC*, on aura *B.BR.BO* = *C.Cc.CL* + *A.AQ.AY*. mais les lignes *BO*, *BK*,

CL,

CL, CZ; AY, AX; ne différent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles. Donc $B.BR.BK = C.Cc.CZ + A.AQ.AX$. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

REMARQUE.

164. Si le Levier ABC (Fig. 66) étoit fixe en quelque point, en Γ par exemple, & qu'on imaginât le Levier dans une autre situation $F\Gamma GE$, la proposition seroit encore vraye & se démontreroit d'une maniére semblable.

De la conservation des forces vives, quand les Corps se tiennent par des verges infléxibles, & qu'on les regarde comme des points.

165. Il est clair que par le Lemme précedent on démontrera la conservation des forces vives, quand les Corps se tiennent par des verges infléxibles, & que chacun de ces Corps est fixe à la verge. Si l'un des Corps comme B pouvoit couler le long de la verge, alors la vitesse BR qu'il perdroit, devroit être perpendiculaire à la verge, & il se trouveroit dans l'instant suivant, non au point G tel que $FG = AB$, (Fig. 64) mais à un point g infiniment proche de celui-là. * Or à cause que les points B, G sont infiniment proches, & que Gg, BA doivent être censées paralléles, la ligne Gg doit être

* On suppose ici que le Levier ABC est une Courbe aussi-bien que FGE, & que BR est perpendiculaire à cette Courbe en B. Il m'a paru inutile de faire pour cela une nouvelle Figure.

regardée comme perpendiculaire à BK, & partant on peut prendre Bk & BK l'une pour l'autre, parce que leur différence est infiniment petite du second ordre. Donc la conservation des forces vives a encore lieu dans ce cas.

De la conservation des forces vives, quand les Corps sont de masses finies, & qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges infléxibles.

166. Nous avons dans le Lem. 13. que si trois Corps A, B, C, animés de vitesses AQ, BR, Cc de directions quelconques, sont en équilibre, on aura $C.Cc.CZ + A.AQ.AX = B.BR.BK$. D'où il s'ensuit, que si on prend Br égale & contraire à BR, (Fig. 64) c'est-à-dire, si on cherche la force résultante des deux puissances $C.Cc$, $A.AQ$, on réduira toujours $C.Cc.CZ + A.AQ.AX$ à un seul produit $B.Br.BK$; & ainsi quel que soit le nombre des Corps attachés à une verge infléxible, si on prend le point B par ou passe la force résultante, & qu'on imagine ce point B parvenu en G, il suffira de prendre le produit de BK par la force résultante, au lieu de la somme de tous ces produits.

Or, pour que la conservation des forces vives ait lieu, il faut, comme nous l'avons vu, que la somme de tous ces produits soit $= o$. Donc il faut, ou que la force résultante soit $= o$, ou que BK soit $= o$; or 1°. quand il n'y a pas de point fixe, la force résultante est $= o$. 2°. Quand il y en a un, la vitesse du point B doit être nulle, ou au moins sa direction est nécessairement perpendiculaire à la direction de la force résultante. En effet, si l'obstacle est un point Mathematique, comme le point d'appui d'un Levier, la direction de la force résultante passe par ce point d'appui ; & le Mouvement du point *B* est un Mouvement de rotation autour de ce point, ou le point *B* n'est autre chose que le point d'appui même, dont le Mouvement est zero. Si l'obstacle est une surface immobile, le point *B* par où passe la direction de la force résultante est nécessairement un point qui touche cette surface, & dont le Mouvement instantané est suivant la direction de cette surface même, tandis que la direction de la force résultante est perpendiculaire à cette surface. Donc en général $BK = 0$, quand il y a un point fixe. Il est donc démontré, que quand les Corps se tiennent par des Leviers infléxibles, fixes ou non fixes, la conservation des forces vives a lieu.

167. Si les Corps se tiennent par des fils, alors on imaginera aux extrêmités de chaque portion de fil qui est entre deux Corps, deux puissances égales & opposées qui tirent dans la direction du fil, & la démonstration se tirera aisément de ce qui a été dit ci-dessus (*art.* 162) quand les Corps étoient regardés comme des points.

168. Si le fil passe à travers un ou plusieurs de ces Corps, de maniére qu'ils puissent y couler librement, alors comme la direction de la force résultante des Mouvemens perdus à chaque instant passe (*art.* 123.) par le point de concours *G* (Fig. 67) des lignes *CS*, *AR*, & divise cet angle en deux également ; il faudra, au lieu

de cette force résultante, imaginer deux puissances égales qui tirent suivant SG, & RG dans la direction des fils CS, AR; de plus, si on suppose que SV, RN soient les chemins des points S, R, & qu'on mene les perpendiculaires, VD, NP, on aura, à cause de $AR+SC$ constante, $SD=RP$. Moyennant ces deux remarques, on viendra aisément à bout de démontrer dans tous les cas, la conservation des forces vives.

De la conservation des forces vives dans le choc des Corps Elastiques.

169. Nous pourrions démontrer la conservation des forces vives dans le choc des Corps Elastiques, en regardant ces Corps comme durs, & supposant que la compression & la restitution du ressort se fit dans un instant; nous avons même déja donné dans *l'art.* 157. un essai de démonstration de cette espece; mais comme nous avons observé que cette hypothese ne pourroit souvent conduire aux véritables loix du choc des Corps Elastiques, nous l'abandonnerons ici, & nous démontrerons la proposition dont il s'agit, en supposant un ressort placé entre les deux Corps, & qui leur donne en sens contraire des forces motrices égales.

170. Soient A, B, (Fig. 68) deux points unis par un ressort AB, lesquels ayant reçu des impulsions quelconques AG, BF, décrivent les Courbes Ama, BMb pendant le tems de la compression & de la restitution

du reſſort : ſoit φ la force motrice variable, qui eſt égale à chaque inſtant pour les deux Corps, & qui les pouſſe en ſens contraire dans la direction du reſſort Mm, V la viteſſe de M, u celle de m, G la viteſſe de B, g celle de A, Mm, x, MV, dz, on aura $BVV = BGG - 2\int\varphi dz$, & $Auu = Agg + 2\int\varphi dx - 2\int\varphi dz$. Mais lorſque $ab = AB$, on a $2\int\varphi dx = 0$. donc $Auu + BVV = BGG + Agg$, lorſque la compreſſion eſt finie.

Il eſt clair que cette démonſtration peut s'étendre à tant de points qu'on voudra, liés enſemble d'une maniére quelconque. On voit donc que la conſervation des forces vives a lieu pour des points liés par des reſſorts.

Quand les Corps ſont finis, il ſuffit (*art.* 166.) pour prouver la conſervation des forces vives, de prouver que cette conſervation a lieu dans les points par où paſſe la direction de la force réſultante des forces qui ſe font équilibre; ces points ſont dans l'un & dans l'autre Corps le point par lequel ils ſe touchent, & que nous ſuppoſons demeurer toujours le point touchant pendant la compreſſion & la reſtitution, que nous regardons ici comme achevées dans un tems très-court. C'eſt par ces points qu'il faut imaginer que paſſe le reſſort, qui leur communique en ſens contraire à chaque inſtant des forces motrices égales, qui ſe diſtribuent enſuite dans toute la maſſe. Donc ce cas ſe trouve par-là réduit au précedent.

171. Si les Corps A, B (Fig. 69) ſe choquoient par le moyen d'une verge CBA fixe en C, alors les forces

motrices appliquées en *A* & en *B* ne seroient plus égales, mais elles seroient en raison inverse des bras *CA*, *CB*; & comme les chemins des points *B* & *A* en tems égaux, sont en raison directe de ces bras de Levier; il s'ensuit que le produit des forces motrices par le chemin des points *A*, *B* seroit égal de part & d'autre. Ainsi on peut encore ici démontrer la conservation des forces vives, soit par le Principe de *l'art.* 157. en supposant les Corps incompressibles, soit en imaginant un ressort infiniment petit placé en *A* & un autre en *B*. Ce qu'il est inutile d'expliquer plus en détail pour des Lecteurs intelligens.

Donc la conservation des forces vives aura encore lieu dans le cas dont il s'agit ici; & il est clair en combinant les Principes établis ci-dessus, qu'on pourra toujours la démontrer dans le choc des Corps Elastiques.

SCOLIE GENERAL.

172. Il résulte de tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, qu'en général la conservation des forces vives dépend de ce Principe, que quand des puissances se font équilibre, les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances. Ce Principe est reconnu depuis long-tems par les Geométres pour le Principe fondamental de l'équilibre; mais personne, que je sache, n'a encore démontré ce Principe

en général, ni fait voir que celui de la conſervation des forces vives en réſulte néceſſairement.

Le Principe de l'équilibre dont nous venons de parler, peut toujours ſe démontrer facilement; car, ou les puiſſances ſont égales & directement oppoſées, ou elles ſont appliquées à des bras de Levier différens, ou enfin la force réſultante de ces puiſſances paſſe par quelque obſtacle fixe & inſurmontable, comme dans le Probl. X. Tout ce que nous avons dit ci-deſſus eſt, ce me ſemble, ſuffiſant pour démontrer les deux premiers cas : à l'égard du dernier cas, il eſt viſible, que les puiſſances décompoſées dans une direction perpendiculaire à la force réſultante ſeront égales, & que les viteſſes dans ce même ſens ſeront égales auſſi. Or delà il eſt aiſé de tirer la démonſtration en la cherchant ſur quelque cas, par exemple, ſur celui du Problême X. où elle eſt aiſée à trouver.

De la conſervation des forces vives dans les Fluides.

173. Soit un vaſe de figure quelconque & indéfini $POTQ$ (Fig. 70) dont la partie $ADCZ$ terminée par les paralléles AD, CZ, ſoit remplie de fluide. Soit imaginé ce fluide diviſé en tranches FKG paralléles à AD; & que tous les points de chaque tranche ſoient animés par une force accélératrice repréſentée par l'ordonnée correſpondante kf de la Courbe dfb; (les ordonnées ad repréſentant les forces accélératrices poſitives, c'eſt-à-dire qui tendent de L vers B, & les ordonnées kf celles

dont la direction est en sens contraire) ; je dis que si le fluide en cet état est en équilibre, l'Aire ou surface *adnmobc* sera zero, c'est-à-dire la somme des Aires positives égale à la somme des Aires négatives.

Car pour l'équilibre, il faut qu'une tranche quelconque FKG soit pressée également de bas en haut, & de haut en bas : or la pression de la tranche FKG suivant LB, est la même que si elle étoit chargée du Cylindre $EHFG$, dont le poids, en appellant LK, x, & φ la force accélératrice de chaque tranche, sera $FG \times \int \varphi \, dx$, ou $FG \times (adin - nfk)$; on prouvera de même que la pression de FG suivant BA, sera $FG\ (kfm - mog + gcb)$ & comme ces deux pressions doivent être égales, on aura $adin - nfk = kfm - mog + gcb$, & $adin - nfkm + mog - gcb = 0$. Donc &c. Ce Q. F. D.

COROLLAIRE.

174. Si au lieu de la force accélératrice φ on substitue la petite vitesse du qui lui seroit proportionnelle, le tems étant constant, c'est-à-dire la petite vitesse avec laquelle chaque tranche, considérée comme isolée, descendroit dans un instant, on aura $\int du\,dx = 0$. Donc si le Fluide se meut vers AB, & que du représente la vitesse perdue ou gagnée par chaque tranche, c'est-à-dire (*art.* 50) la vitesse par laquelle chaque tranche seroit restée en équilibre avec les autres, on aura $\int du\,dx = 0$.

REMARQUE.

175. Nous avons fait voir ci-dessus en général (*art.* 159) que la conservation des forces vives quand les Corps sont animés par la pesanteur ou par une force accélératrice quelconque, dépend de la conservation des forces vives quand il n'y a point de forces accélératrices. Nous nous contenterons donc de prouver, que si un Fluide *ADZC*, poussé & mis d'abord en Mouvement par quelque cause (comme par un Piston) se meut dans le vase *POTQ*, abstraction faite de la pesanteur, la conservation des forces vives aura lieu.

Pour cela, nous imaginerons le Fluide partagé en tranches égales & infiniment petites, dont la masse sera appellée m, & dont l'épaisseur sera dx & y la largeur; on aura ainsi $m = ydx$. Si on appelle u la vitesse de chaque tranche, & $u \pm du$ sa vitesse dans l'instant suivant; il faudra par notre Principe, que les tranches animées des vitesses du se fassent équilibre, c'est-à-dire que $\int du\,dx$ sera $= 0$. (*Cor. préced.*) Mais pour démontrer la conservation des forces vives, il faut prouver que $\int mu\,du = 0$: or $u = \frac{1}{y}$, puisque la vitesse de chaque tranche est en raison inverse de sa largeur; $m = ydx$. donc $\int mu\,du = \int du\,dx = 0$. Donc &c.

AVERTISSEMENT.

M. *Daniel Bernoulli* dans son excellent Ouvrage qui a pour titre : *Hydrodynamica* &c. a tiré les loix du Mouvement des Fluides dans des vases, de la conservation des forces vives, mais sans la démontrer. Comme notre Principe général exposé *art.* 50. nous a conduit à en trouver la démonstration, il est évident que nous aurions pû déduire immédiatement de ce même Principe le Mouvement du Fluide, ce qui auroit encore été plus lumineux & plus direct. Mais comme notre dessein n'est point de traiter ici des Fluides, nous nous sommes contentés de faire voir en deux mots l'usage de notre Principe dans une matiére qui paroît si épineuse. Nous nous contenterons donc ici de ce leger essai, & nous entrerons là-dessus dans un détail beaucoup plus grand, lorsque nous donnerons notre Traité des Fluides, dans lequel nous déduirons de notre Principe général, la solution des Problêmes les plus difficiles qu'on ait jusqu'à présent proposé sur cette matiére.

FIN.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 22. Juin 1743.

MEssieurs DE MAUPERTUIS & NICOLE, ayant examiné par ordre de l'Académie, le *Traité de Dynamique* de M. D'ALEMBERT, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 25. Juin 1743.

DORTOUS DE MAIRAN, *Sécretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin, à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du 6. Avril 1693, n'ayant point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt du Conseil d'Etat du 13. Août 1704, celles de 1713 & celles de 1716 étant aussi expirées: Et désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Presentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, toutes les *Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Royale des Sciences; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression*; & ce, pendant le temps & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles mêmes séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que notredite Académie se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & les Certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin ; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin : le tout à peine de nullité des Presentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Presentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. DONNE' à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre, l'an de grace mil sept cent trente-quatre, & de notre Regne le vingtiéme. Par le Roi en son Conseil,

SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 792. Fol. 775. conformément au Reglement de 1723. qui fait défense, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Réglement, A Paris le 15. Novembre 1734.

G. MARTIN, *Syndic.*

FAUTES A CORRIGER.

P*Age* 13, *ligne* 4, *CE*, *lisez Ce.*

Page 21, *lig.* 12, les tems, *lis.* les quarrés des tems.

Page 46, *lig.* 2, qui ait, *lis.* qui aye.

Page 60, *lig.* 14, *Coroll. lis. Lemme.*

Page 82, *lig. derniére*, $\frac{Ffx}{P}$, *lis.* $\frac{Fgx}{p}$.

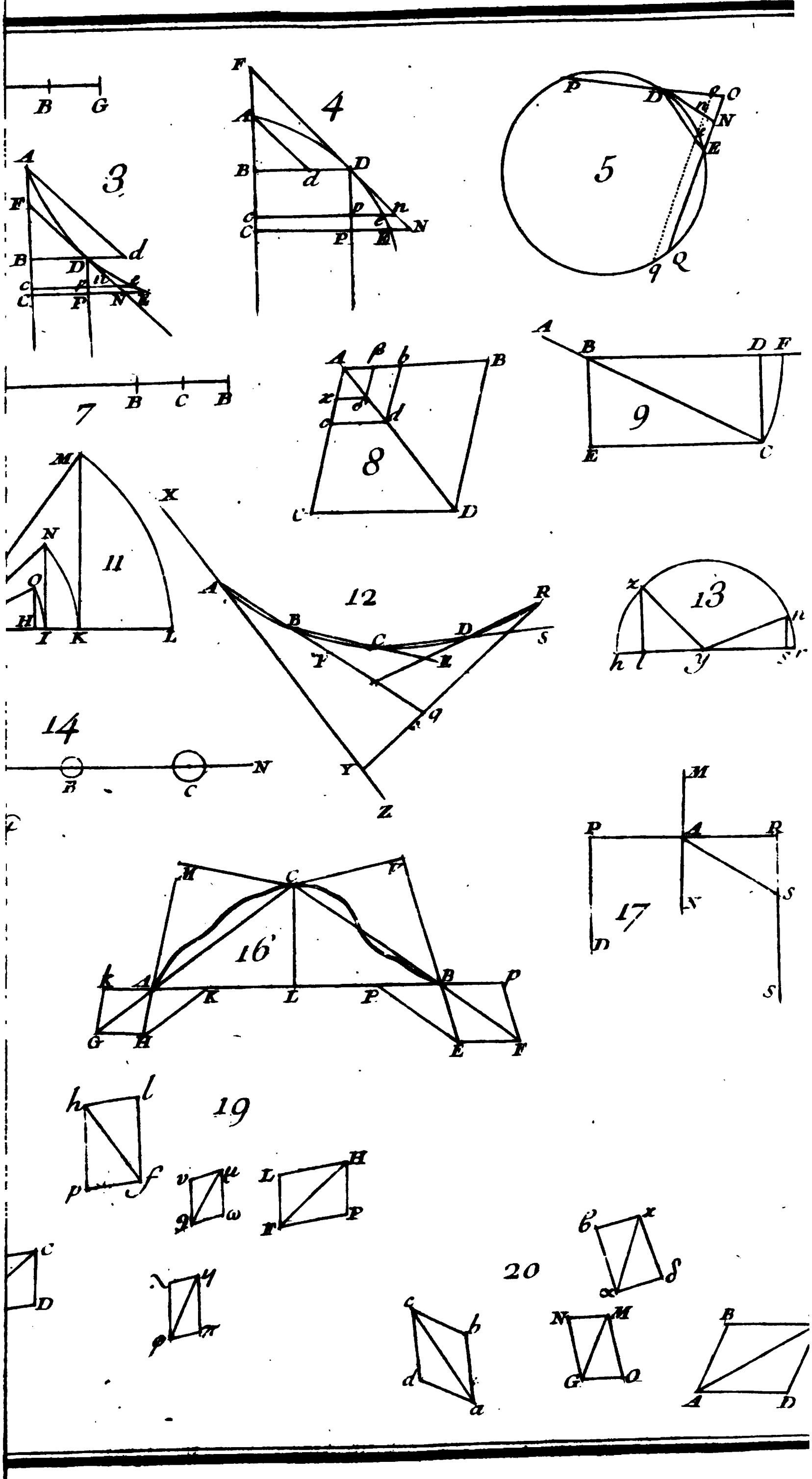
Page 106, *lig.* 14, $\mu\alpha$, *lis.* μZ.

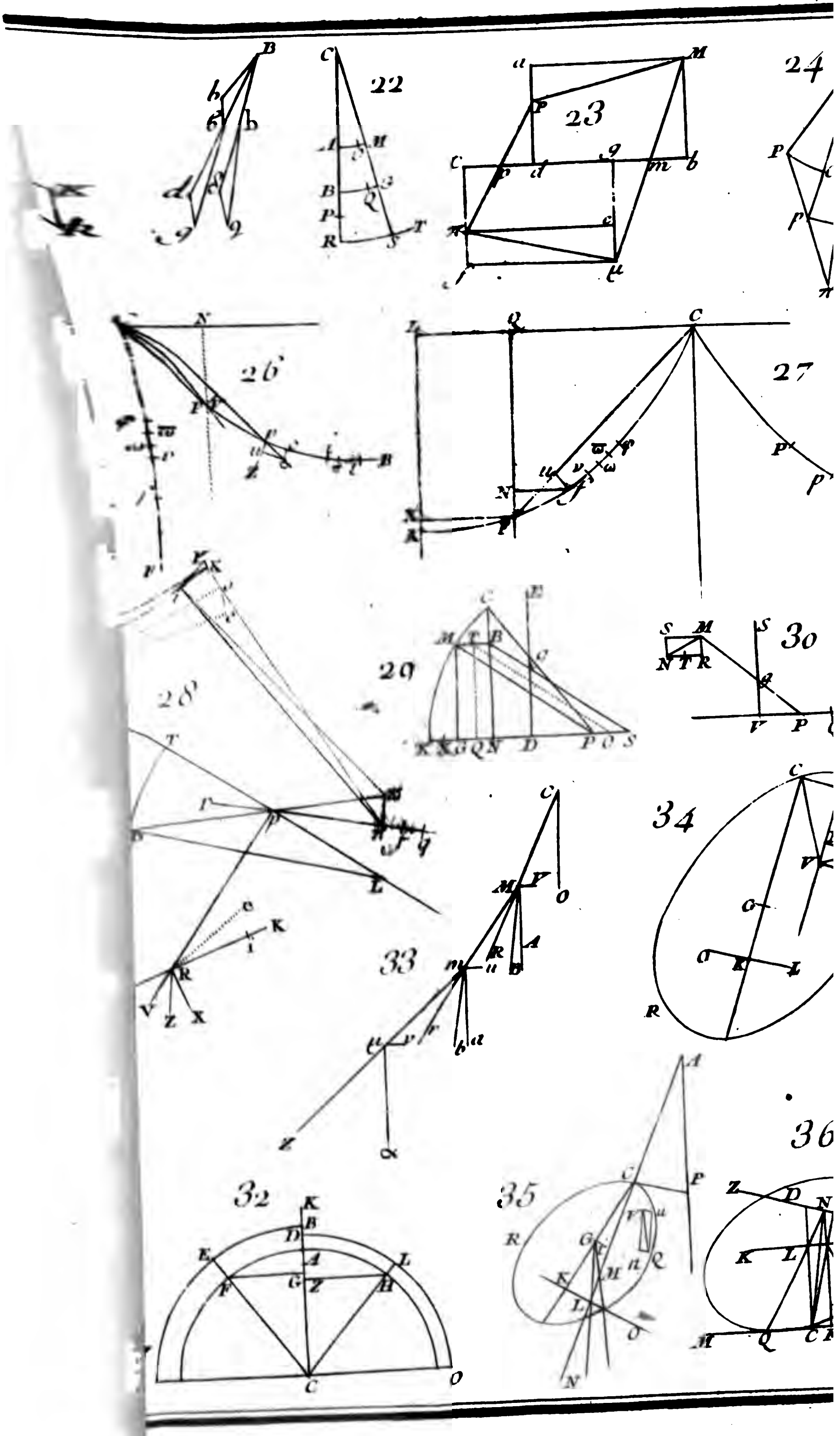
Page 119, *lig.* 18, *G*, *lis. C.*

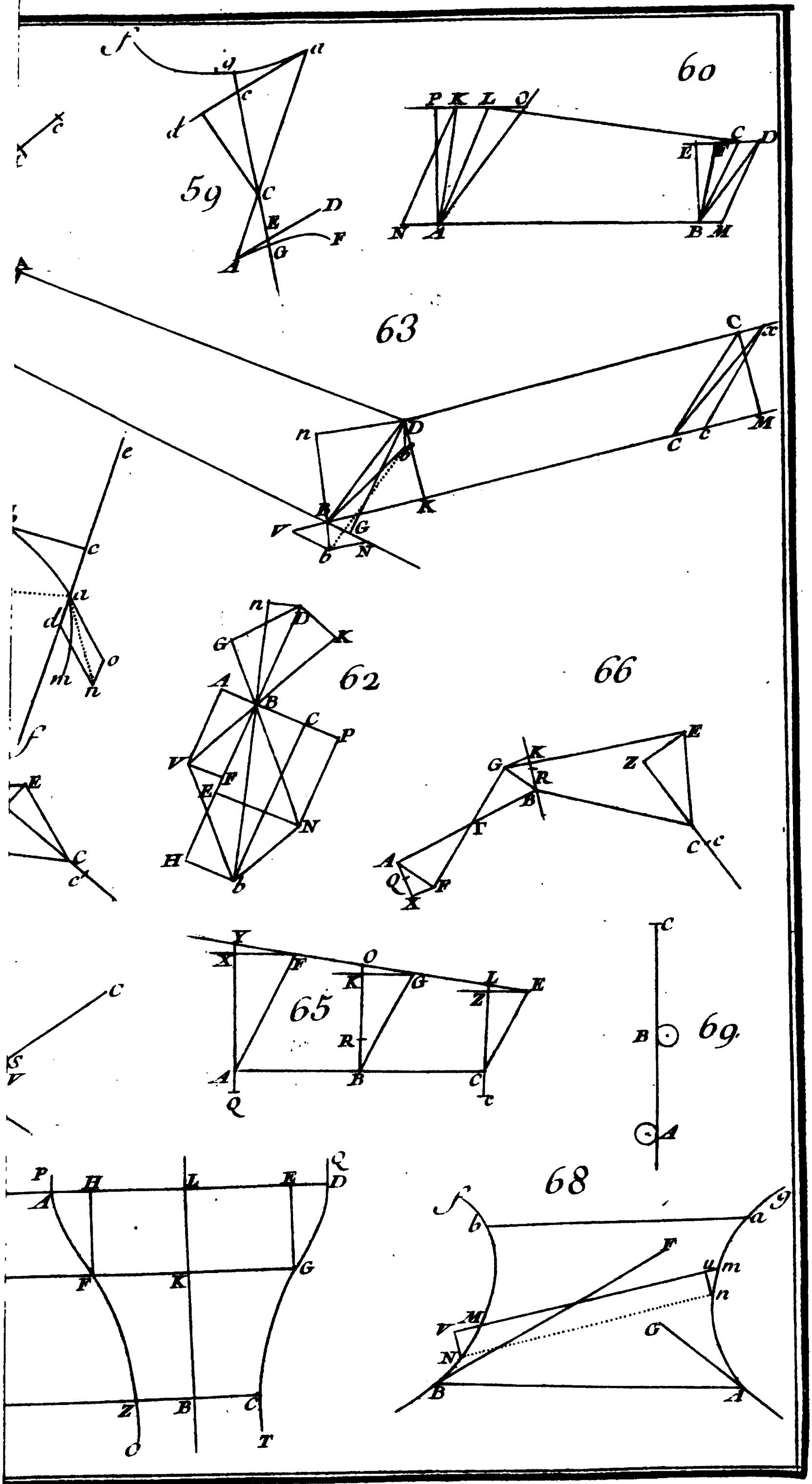
Page 138, *lig.* 11, $U - v$, *lis.* $U - V$.

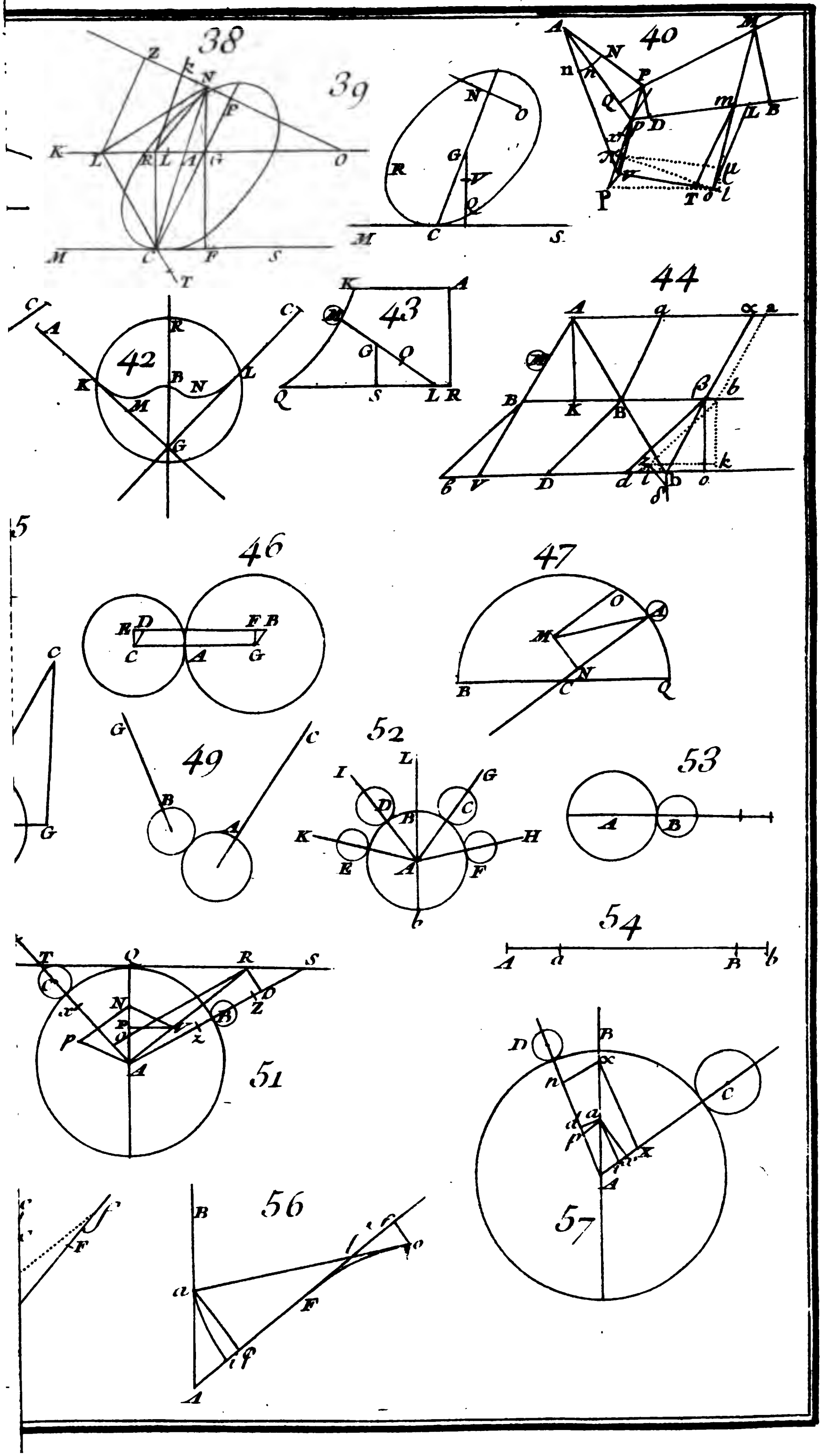
Pag. 164, *lig.* 5, $Ax - Ff + \frac{ax^2}{2FA}$, *lis.* $A\varphi - Ff + \frac{a\varphi^2}{2FA}$.

DE L'IMPRIMERIE DE JEAN-BAPTISTE COIGNARD,
IMPRIMEUR DU ROI.


3
4
5
7
8
9
11
12
13
14
16
17
19
20


22
23
24
26
27
28
29
30
32
33
34
35
36


59
60
63
62
66
65
69
68


38
39
40
42
43
44
5
46
47
49
52
53
54
51
57
56

8th